承辦單位：國立中山大學應用數學系
答案：

1.	108°	2.	1	3.	32	4.	250	5.	第二行
6.	$\frac{1}{2}s(2-\sqrt{3})$	7.	18	8.	$\frac{5}{16}$	9.	$\frac{13}{729}$	10.	2
11.	40	12.	$4''$	13.	$\frac{3}{16}$	14.	1001	15.	$-\frac{1}{2}$
16.	8 人	17.	1	18.	$\frac{b^2-2ac}{c^2}$	19.	$2\sqrt{13}$	20.	70°

注意事項：

1. 本試卷共 20 題計算題，每一題 5 分。
2. 考試時間： 10：00～12：00。
3. 請將詳細步驟書寫於題目下方空白處，答案必須化簡並書寫於上方指定處。
4. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。

---

1. 若凸五邊形之角度成等差數列，則其第三大角之度量爲何？ 108°

解答: 令五邊形角度爲 $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$，則 $5a=540^\circ$，所以 $a=108^\circ$。□

2. 方程式 $64x^3-144x^2+92x-15=0$ 的根組成等差數列，求此方程式的最大根與最小根之差爲何？ 1

解答: 將原方程兩邊除以 64，得到下面的等價方程

$$x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{23}{16}x-\frac{15}{64}=0$$

由於三個根組成等差數列，則可設爲 $a-d, a, a+d$；此外，由於三根之和的負值等於 x^2 項的係數，三根之積的負值等於常數項，所以 $3a=\frac{9}{4}, a=\frac{3}{4}$。

$$a(a^2-d^2)=\frac{15}{64}=\frac{3}{4}\left(\frac{9}{16}-d^2\right),\quad d^2=\frac{1}{4},\quad d=\pm\frac{1}{2}$$

因此最大根與最小根之差等於

$$(a+|d|)-(a-|d|)=2|d|=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

□

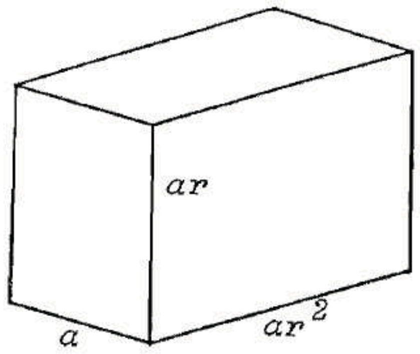
3. 某長方體的體積是 8 立方厘米，它的表面積是 32 平方厘米，並且長、寬、高成一等比數列，試問這長方體的所有稜長之和 (以厘米爲單位) 爲多少？ 32

解答: 設長方體邊長分別爲 a, ar 及 ar^2，則

$$\begin{aligned} \text{體積} &= a(ar)(ar^2) = 8 \\ ar &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{表面積} &= 2a^2r + 2a^2r^2 + 2a^2r^3 = 32 \\ &= 2(ar)(a + ar + ar^2) \\ &= 4(a + ar + ar^2) \qquad (1) \end{aligned}$$

但 (1) 爲邊長的總和。 □



4. 已知一數列的第一項爲 2005，接下來的項爲前一項的各數字的立方和，試問第 2005 項爲何？ 250

解答: 此數列開始幾項爲 2005, 133, 55, 250, 133, . . .，因此在 2005 後，數列是以 133, 55, 250 爲循環，因爲 $2005 = 1 + 3 \cdot 668$，所以第 2005 項爲 250。 □

5. 將正奇數 1, 3, 5, 7, . . .，排成五行，按下列的格式排下去，試問 1985 所在位置，爲從左邊數起來是第幾行？ 第二行

	1	3	5	7
15	13	11	9	
	17	19	21	23
31	29	27	25	
	33	35	37	39
47	45	43	41	
	49	51	53	55
.	.	.	.	
	.	.	.	.
.	.	.	.	

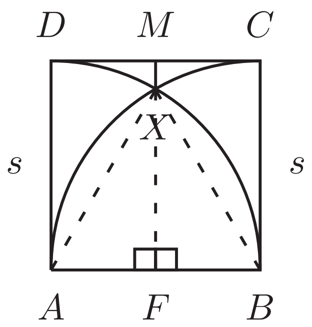
解答: **【解法一】** 觀察第一行的數字，都有 $16n - 1,\ n = 1, 2, \ldots$ 這種形式，接著去看緊接著第一行的下一列的數，在相同的 n 下，皆有 $16n + 1$ 這種形式。因爲，$1985 = 16 \cdot 124 + 1$，所以 1985 是在第二行。

【解法二】 觀察介於 0 到 8 的所有奇數，都出現在第一列，而介於 8 到 16

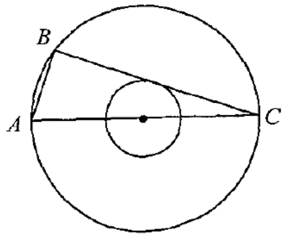
的數都在第二列，一般來說，所有介於 $8(n-1)$ 跟 $8n$ 的數都在第 n 列。因爲 $1985 = 248 \cdot 8 + 1$，所以可以得知 1985 是在第 249 列裡最小的奇數，觀察在奇數列的數字是從左到右，因此 1985 是在第二行。 □

6. 在邊長爲 s 的正方形 $ABCD$，以 A 和 B 爲中心作四分之一圓弧。這些圓弧交於正方形內的一點 X, X 與 $\overline{CD}$ 邊的距離是多少？ $\underline{\frac{1}{2}s(2-\sqrt{3})}$

解答: 圓弧 $\overset{\frown}{AXC}$ 和 $\overset{\frown}{BXD}$ 交於 X，圓半徑爲 s，因此 $\triangle ABX$ 爲正三角形。令過 X 垂直 $\overline{AB}$ 的直線分別交 $\overline{AB}$ 及 $\overline{CD}$ 於 F 和 M，題目所求的 X 到 $\overline{CD}$ 的距離即爲 $\overline{MX}$，又 $\overline{MX} = s - \overline{XF} = s - s \times \sin 60° = s - \frac{1}{2}s\sqrt{3} = \frac{1}{2}s(2-\sqrt{3})$。 □



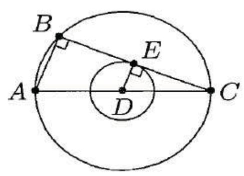
7. 兩同心圓之半徑比爲 $1:3$，若 $\overline{AC}$ 爲大圓的一直徑，而 $\overline{BC}$ 爲大圓的一條與小圓相切的弦，且 $\overline{AB} = 12$，試問大圓的半徑爲多少？ $\underline{18}$



解答: 【**解法一**】 將圓心 D 與切點 E 連線，則可知 $\angle CED$ 爲直角；已知 $\overline{AC}$ 爲大圓直徑，則 $\angle CBA$ 亦直角，且 $\angle BCD = \angle BCA$，因此 $\triangle ABC \sim \triangle DEC$，

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{DE}}{12}$$

求得小圓半徑 $\overline{DE} = 6$，由題意可知，兩同心圓之半徑比爲 $1:3$，故大圓半徑爲 $6 \times 3 = 18$。 □

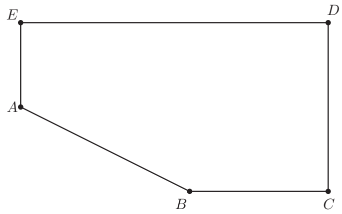


【**解法二**】 延用【**解法一**】 的圖形，則

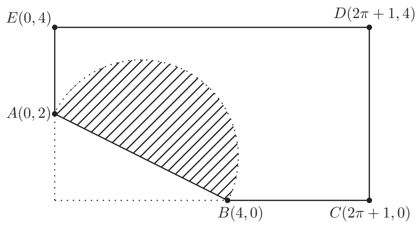
$$\sin\angle ECD = \sin\angle BCA = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DC}} = \frac{1}{3}$$

因此 $\overline{AC}/2 = 3\overline{AB}/2 = 36/2 = 18$。 □

8. 已知五邊形 $ABCDE$ 的頂點爲 $A(0,2)$, $B(4,0)$, $C(2\pi+1,0)$, $D(2\pi+1,4)$ 及 $E(0,4)$，現從這五邊形內部中任取一點 P，試問 $\angle APB$ 是鈍角的機率爲多少？ $\underline{\frac{5}{16}}$



解答: 以 A, B 爲直徑畫一半圓，若點 P 落於此半圓内，會使得 $\angle APB$ 爲鈍角，如下圖斜線部分



因爲 $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$，所以圓半徑爲 $\sqrt{5}$，故所求機率爲

$$\frac{\text{半圓面積(斜線部分)}}{ABCDE\ \text{面積}} = \frac{\frac{1}{2}\pi(\sqrt{5})^2}{(2\pi+1)\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2} = \frac{\frac{5}{2}\pi}{8\pi} = \frac{5}{16}$$ □

9. 一個骰子擲六次，至少有五次得到五點以上的機率爲何？ $\underline{\frac{13}{729}}$

解答: 可將題意視爲若得到五點以上即稱爲成功，令成功機率 $p = \frac{1}{3}$，反之爲失敗，則題意即爲求 $P(X \geq 5)$，所以

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= P(X=5) + P(X=6) \\ &= \binom{6}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{6}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{13}{729} \end{aligned}$$ □

10. 當 $x^{13}+1$ 以 $x-1$ 除時，其餘數爲何？ $\underline{2}$

解答: 設 $f(x) = x^{13}+1$，則 $f(x) = (x-1)\cdot Q(x) + R(x)$，其中 $Q(x)$, $R(x)$ 分別爲商式和餘式，且因爲除式 $(x-1)$ 爲一次式，所以餘式爲常數，故餘式定理可知，餘數爲 $f(1) = 2$。 □

11. 從一群男女中，女生走了 15 名時，則剩下來的男女生比例爲 $2:1$，在此之後，男生又走了 45 名，則男女的比例爲 $1:5$，問最初之女生人數爲何？ $\underline{40}$

解答: 設最初女生人數爲 x，則由題意知 $2(x-15)$ 爲男生人數，再由題意知

$$\begin{aligned}\frac{1}{5} &= \frac{2(x-15)-45}{x-15}\\ 10x-375 &= x-15\\ 9x &= 360\\ x &= 40\end{aligned}$$

故最初女生人數爲 40 人。 □

12. 設 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AC}=24''$, $\overline{BC}=10''$, $\overline{AB}=26''$，則內切圓半徑爲(“ $''$ ”表吋)？ $\underline{4''}$

解答: 設 A 爲三角形面積，r 爲內接圓半徑，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(24+10+26)=30$，則由海龍公式可知

$$A=r\cdot s=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

因此 $r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$，故 $r=\sqrt{\frac{(30-24)(30-10)(30-26)}{30}}=4''$。 □

13. 求 $\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{2}{7^4}+\cdots$ 之值爲何？ $\underline{\frac{3}{16}}$

解答: 將式子改寫爲

$$\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7^3}+\cdots\right)+\left(\frac{2}{7^2}+\frac{2}{7^4}+\cdots\right) \tag{2}$$

可知 (2) 相當於兩個無窮等比級數之和，分別討論：

i. 令無窮等比級數 $S_1=\frac{1}{7}+\frac{1}{7^3}+\cdots$，首項爲 $\frac{1}{7}$，公比爲 $\frac{1}{7^2}<1$，故和爲

$$S_1=\frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7^2}}=\frac{7}{48}$$

ii. 令無窮等比級數 $S_2=\frac{2}{7^2}+\frac{2}{7^4}+\cdots$，首項爲 $\frac{2}{7^2}$，公比爲 $\frac{1}{7^2}<1$，故和爲

$$S_2=\frac{\frac{2}{7^2}}{1-\frac{1}{7^2}}=\frac{2}{48}$$

由以上結果可知，

$$S_1+S_2=\frac{7}{48}+\frac{2}{48}=\frac{9}{48}=\frac{3}{16}$$ □

14. 六位數由三位數重複而得，如 256256 或 678678 ，則任意六位數均可被哪一個最大整數整除？ $\underline{1001}$

解答: 設某六位數中重複的三位數爲 μ，則六位數可表示成 $1000\mu+\mu$，化簡可知 $\mu(1000+1)=\mu(1001)$，故任意六位數均可被 1001 整除。 □

15. 若方程式 $\frac{x(x-1)-(m+1)}{(x-1)(m-1)}=\frac{x}{m}$ 的各根相等，則 m 值爲何？ $\underline{-\frac{1}{2}}$

解答: 展開方程式

$$\begin{aligned} x(x-1)(m-1) &= mx(x-1)-m(m+1) \\ (-1)x(x-1) &= -m(m+1) \\ x^2-x-(m^2+m) &= 0 \end{aligned}$$

因爲方程式等根，所以判別式爲零，因此

$$\begin{aligned} 1+4(m^2+m) &= 0 \\ 4m^2+4m+1 &= 0 \\ (2m+1)^2 &= 0 \\ m &= -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

故當 $m=-\frac{1}{2}$ 時，方程式有重根。 □

16. 在宴會結束時，假設每一位參加宴會的人對其他的與會人士均有一樣的禮節，總共作了 28 個握手，那麼與會人士共有多少人？ $\underline{8\text{ 人}}$

解答: 設與會的人士共有 n 人，對其中一人 P 來說，與本人外的 $(n-1)$ 人握手。
今有 n 人，故共有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 的握手次數，即

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} &= 28 \\ n^2-n-56 &= 0 \\ (n-8)(n+7) &= 0 \\ n &= 8,-7 \quad (\text{人數須爲正，故 } -7 \text{ 不合}) \end{aligned}$$

故與會人士共 8 人。 □

17. 化簡 $\left[\frac{(x+1)^2(x^2-x+1)^2}{(x^3+1)^2}\right]^2 \cdot \left[\frac{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}{(x^3-1)^2}\right]^2$。 $\underline{1}$

解答:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{(x+1)^2(x^2-x+1)^2}{(x^3+1)^2}\right]^2 \left[\frac{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}{(x^3-1)^2}\right]^2 \\ =&\left[\frac{(x^3+1)^2}{(x^3+1)^2}\right]^2 \cdot \left[\frac{(x^3-1)^2}{(x^3-1)^2}\right]^2 = 1 \end{aligned}$$ □

18. 若 r 與 s 是方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根，則 $\frac{1}{r^2}+\frac{1}{s^2}$ 之值爲何？ $\underline{\frac{b^2-2ac}{c^2}}$

解答: 利用根與係數關係，可知 $r+s=\frac{-b}{a}, rs=\frac{c}{a}$，則

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{r+s}{rs}=\frac{-\dfrac{b}{c}}{\dfrac{c}{a}}=\frac{-b}{c}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}+\frac{1}{s^2}&=\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right)^2-\frac{2}{rs}\\&=\left(\frac{-b}{c}\right)^2-\frac{2}{\dfrac{c}{a}}\\&=\frac{b^2}{c^2}-\frac{2a}{c}=\frac{b^2-2ac}{c^2}\end{aligned}$$

□

19. 由直角三角形之銳角頂所引之中線爲 5 與 $\sqrt{40}$，斜邊長爲何？ $\underline{2\sqrt{13}}$

解答: 設直角三角形的兩股長各爲 x, y，且 x 上之中線長爲 $\sqrt{40}$，y 上之中線長爲 5，則

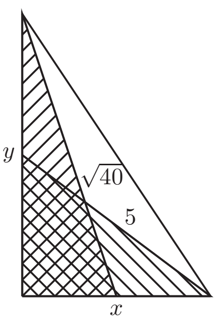
$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=(\sqrt{40})^2 \tag{3}$$

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2+x^2=5^2 \tag{4}$$

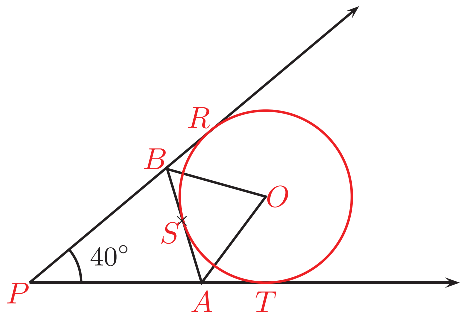
將 (3) 與 (4) 相加，可得

$$\begin{aligned}\frac{5}{4}x^2+\frac{5}{4}y^2&=65\\x^2+y^2&=52\\\sqrt{x^2+y^2}&=\sqrt{52}=2\sqrt{13}\end{aligned}$$

□



20. 三角形 PAB 由切於圓 O 之三切線形成，且 $\angle APB=40°$，則 $\angle AOB$ 爲何？ $\underline{70°}$



解答: 因爲 $\angle P = 40^\circ$ 且 $\angle PAB + \angle PBA = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$，所以

$$\angle TAS = 180^\circ - \angle PAB \tag{5}$$
$$\angle RBS = 180^\circ - \angle PBA \tag{6}$$

(5) 和 (6) 相加，可得

$$\angle TAS + \angle RBS = 360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$$

因 $\overline{OA}$ 與 $\overline{OB}$ 平分 $\angle TAS$ 和 $\angle RBS$，因此 $\angle OAS + \angle OBS = \frac{1}{2}(220^\circ) = 110^\circ$，故 $\angle AOB = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$。 □

~全卷完~