承辦單位：國立中山大學應用數學系

答案：

1. $\frac{11}{21}$	2. $\frac{1}{12}$	3. 15	4. 50°	5. $\{-4, 0, 4\}$
6. 15°	7. 128	8. $\frac{S}{r^{n-1}}$	9. 8	10. $0, 3$
11. $x < 1,\ x \neq -1$	12. $\frac{13}{81}$	13. 36	14. 6	15. $\frac{x(x+2)(x+5)}{(x+1)(x+3)}$
16. 6	17. 15	18. $\sqrt{22}$	19. $x+2$	20. 9

注意事項：

1. 本試卷共 20 題計算題，每一題 5 分。
2. 考試時間：　10：00～12：00。
3. 請將詳細步驟書寫於題目下方空白處，答案必須化簡並書寫於上方指定處。
4. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。

---

1. 隨機將一顆公正骰子上的一點抹掉，且每個點被抹掉的機率會相同，然後投擲這顆骰子，求骰子朝上那個面出現奇數點的機率。

解答: 骰子中共有 $1+2+\cdots+6=21$ 個點，因爲每個點被抹掉的機率相同，則點數爲 1 上的點被移除的機率爲 $\frac{1}{21}$，點數爲 2 上的點被移除的機率爲 $\frac{2}{21}$，以此類推，點數爲 6 上的點被移除的機率爲 $\frac{6}{21}$，故

$$\begin{aligned}P(\text{出現奇數點}) &= P(\text{出現奇數點} \mid \text{移除點的面爲奇數}) \cdot P(\text{移除點的面爲奇數}) \\ &\quad + P(\text{出現奇數點} \mid \text{移除點的面爲偶數}) \cdot P(\text{移除點的面爲偶數}) \\ &= \frac{2}{6} \cdot \frac{1+3+5}{21} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2+4+6}{21} = \frac{11}{21}\end{aligned}$$

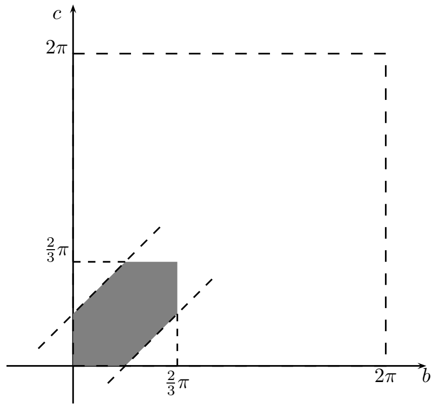
□

2. 由一圓的圓周上任取三點，求在此三點中，任意兩點間的距離皆會小於圓半徑的機率。

解答: **【解法一】** 取一圓心爲 $O(0,0)$ 的單位圓，令 $P,\ Q,\ R$ 分別爲圓周上任取的三點，且 $\overset{\frown}{AP}=a,\ \overset{\frown}{AQ}=b,\ \overset{\frown}{AR}=c$，其中 $A(1,0)$ 爲圓上一定點，$a,b,c\in[0,2\pi)$。不失一般性假設 $\overset{\frown}{AP}=a=\frac{\pi}{3}$，因欲求三點間彼此的距離皆須小於半徑，則

$$0 \leq b \leq \frac{2\pi}{3}, \quad 0 \leq c \leq \frac{2\pi}{3}, \quad \text{且} \quad |b-c| \leq \frac{\pi}{3}$$

故 b 與 c 所推得之範圍如下圖



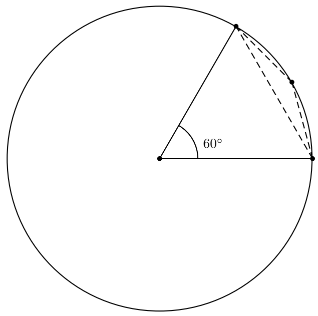
而斜線部分的面積爲

$$\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 - 2\times\left[\frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\right] = \frac{\pi^2}{3}$$

因此所求機率爲

$$\frac{\frac{\pi^2}{3}}{(2\pi)^2} = \frac{1}{12}$$

【**解法二**】　在圓上任取三點，任兩點間的距離接會小於半徑，即表示在所取的三點中，距離最遠的兩點與圓心所形成的圓心角須小於 60° (因若圓心角爲 60° 時，呈現一正三角形，則兩取點間的距離即爲半徑)，如下圖所示



不失一般性假設所選取三點爲 A, B, C，在圓心角爲 60° 的圓周上隨機的散佈，若以順時針方向來觀察，則第一個點可能有 3 種不同的標號，則剩餘的兩點可選取的機率分別爲 $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$，故所求機率爲

$$\underbrace{3}_{\text{第一個點}} \times \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^2}_{\text{其餘兩點}} = \frac{1}{12}$$

□

3. 一個人有一分、五分、一角、兩角五分和五角的硬幣 2.73 美元，若他每一種的硬幣數目相等，求他所有的硬幣總數。

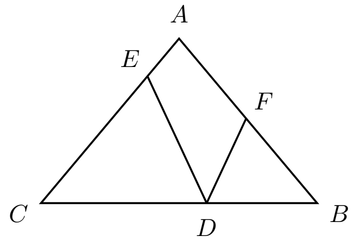
解答: 設此人有每種硬幣 x 枚，則

$$(0.01+0.05+0.1+0.25+0.5)x = 273$$

解得 $x = 3$，所以共有 15 枚。

□

4. 在下圖中，$\overline{AB}=\overline{AC}$, $\angle A=80^\circ$，如果 D, E 和 F 點分別在 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ 和 $\overline{AB}$ 邊上，並且 $\overline{CE}=\overline{CD}$, $\overline{BF}=\overline{BD}$，求 $\angle EDF$。



解答: $\angle B=\angle C=\frac{180^\circ-80^\circ}{2}=50^\circ$，所以

$$\angle CDE+\angle BDF=2\times\frac{1}{2}\times(180^\circ-50^\circ)=130^\circ$$

因此 $\angle EDF=180^\circ-(\angle CDE+\angle BDF)=50^\circ$。 □

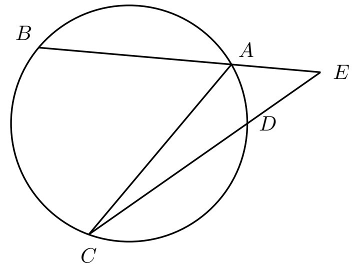
5. 非零實數的每一個三重組 (a,b,c) 構成一個數 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$，求如此構成的所有數的集合。

解答: 分別討論 a, b, c 的正負，則

i. 若 a, b, c 均爲正數，則 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ 爲 4；
ii. 若 a, b, c 兩正一負，則 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ 爲 0；
iii. 若 a, b, c 兩負一正，則 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ 爲 0；
iv. 若 a, b, c 均爲負數，則 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ 爲 -4。

故可知構成的所有數集合爲 $\{-4,\ 0,\ 4\}$。 □

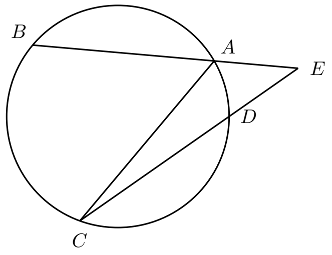
6. 在下圖中，$\angle E=40^\circ$，弧 $\overset{\frown}{AB}$、弧 $\overset{\frown}{BC}$ 和弧 $\overset{\frown}{CD}$ 的長都相等，求 $\angle ACD$ 的度數。



解答: 如下圖所示，設 $\overset{\frown}{AB}=x^\circ$, $\overset{\frown}{AD}=y^\circ$ ($\overset{\frown}{xy}$ 表示劣弧所對的圓心角)，則

$$3x+y=360 \tag{1}$$
$$\frac{1}{2}(x-y)=40 \tag{2}$$

由 (1) 和 (2) 解得 $x=110$, $y=30$，所以 $\angle ACD=\frac{1}{2}y^\circ=15^\circ$。 □



7. 若 $(3x-1)^7 = a_7x^7 + a_6x^6 + \cdots + a_0$，求 $a_7 + a_6 + \cdots + a_0$。

解答: 將 $x=1$ 帶入得 $a_7 + a_6 + a_5 + \cdots + a_0 = (3\times 1 - 1)^7 = 2^7 = 128$。 $\square$

8. 設有一個 n 項的等比數列，首項是 1，公比是 r，和是 S，其中 r 和 S 均爲非零實數。求原數列每一項都用它的倒數取代後所得到的新的等比數列的和。

解答: 此和爲 $1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^{n-1}} = \frac{1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}}{r^{n-1}} = \frac{S}{r^{n-1}}$。 $\square$

9. 求有多少個大於 10、小於 100 的整數，寫成十進位制時，它們的數字交換後，比原數增加 9。

解答: 設此數爲 tu，則 $(10u+t)-(10t+u) = 9$，則 $u = t+1$，得 8 個解 $\{12, 23, \ldots, 89\}$。 $\square$

10. 若 c 是實數，並且 $x^2 - 3x + c = 0$ 的一個解的乘以 -1 是 $x^2 + 3x - c = 0$ 的一個解，求 $x^2 - 3x + c = 0$ 的解。

解答: 設 r 是 $x^2 - 3x + c = 0$ 的解，$-r$ 是 $x^2 + 3x - c = 0$ 的解。所以 $r^2 - 3r + c = 0$, $r^2 - 3r - c = 0$，則 $c = 0$，得方程 $x^2 - 3x = 0$，解爲 $x = 0, 3$。 $\square$

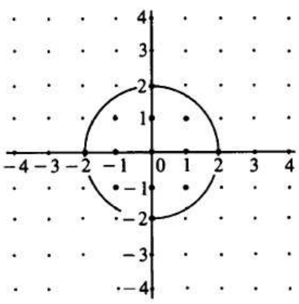
11. 若 x 是實數，求 $(1-|x|)(1+x)$ 是正數的充分必要條件。

解答: $(1-|x|)(1+x)$ 爲正數必須兩因式同號，因此

(i) 同正，則 $|x| < 1$ 且 $1 + x > 0$，得 $-1 < x < 1$。

(ii) 同負，則 $|x| > 1$ 且 $1 + x < 0$，得 $x < -1$。 $\square$

12. 在 xy 平面上一點，其 x, y 座標皆是絕對值小於或等於 4 的整數，且滿足此條件的點被選取之機率皆相同，求從這個點到原點的距離不大於 2 單位的機率。



解答: 此點的 x, y 座標的可能情況共有 $9 \times 9 = 81$ 種，而與原點距離不大於 2 的點列舉如下

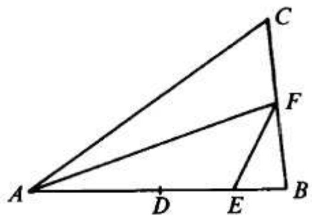
(1) 當 $x=0$ 時：y 可爲 $0, \pm1, \pm2$，即表示點 $(0,0), (0,\pm1), (0,\pm2)$，共 5 種可能。

(2) 當 $x=\pm1$ 時：y 可爲 $0, \pm1$，即表示點 $(\pm1,0), (\pm1,\pm1)$，共 6 種可能。

(3) 當 $x=\pm2$ 時：y 只能爲 0，即表示點 $(\pm2,0)$，共 2 種可能。

綜合上述情況，與原點距離不大於 2 的點共有 $5+6+2=13$ 種可能，故機率爲 $\frac{13}{81}$。 □

13. 在三角形 ABC 中，D 是 $\overline{AB}$ 的中點，E 是 $\overline{DB}$ 的中點，F 是 $\overline{BC}$ 的中點。若 $\triangle ABC$ 的面積是 96，求 $\triangle AEF$ 的面積。



解答: $\triangle AEF$ 面積 $=\frac{3}{4}\triangle ABF$ 面積 $=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\triangle ABC$ 面積 $=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 96=36$。 □

14. 某超級市場有 128 箱蘋果，每箱至少有 120 個，至多有 144 個。將裝蘋果個數相同的箱子稱爲一組，其中最大一組的箱子個數爲 n，求 n 的最小值。

解答: 因爲每一箱蘋果的可能個數有 25 種可能，則由鴿籠原理知，最大一組的箱子個數至少有 $\lceil\frac{128}{25}\rceil=6$。 □

15. 若 x 頭奶牛可在 $(x+2)$ 天中得到 $(x+1)$ 桶奶，求 $(x+3)$ 頭奶牛得到 $(x+5)$ 桶奶需要多少天。

解答: 一頭奶牛每天產 $\frac{x+1}{x(x+2)}$ 桶奶，則可知共需 $\frac{x(x+2)(x+5)}{(x+1)(x+3)}$ 天。 □

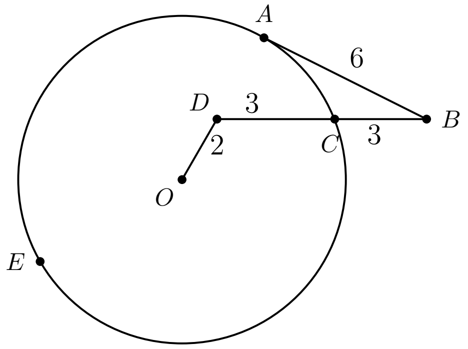
16. 一個凸邊形的內角度數成等差數列，若最小的角是 $100°$，最大的角是 $140°$，求多邊形的邊數。

解答: 設此爲 n 邊形，其內角和爲 $(n-2)\cdot180$ 度，所以有 $(n-2)\cdot180=\frac{n}{2}(100+140)$，得 $n=6$。 □

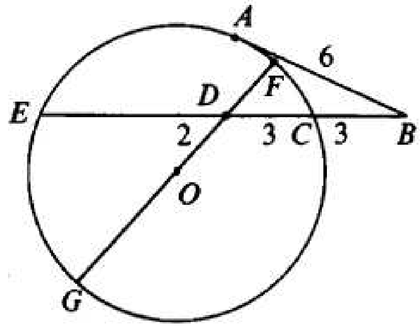
17. 數 1059, 1417, 2312 每個數各除以 d，若餘數都是 r，其中 d 是大於 1 的整數，求 $d-r$。

解答: d 可整除 $2312-1417=895$，又可整除 $1417-1059=358$，而 895, 358 的最大公因數是 179，且 $d>1$，所以 $d=179, r=164$，得 $d-r=15$。 □

18. 在下圖中，$\overline{AB}$ 與圓心 O 的圓相切於 A, D 點在圓內，$\overline{DB}$ 與圓相交於 C, $\overline{BC}=\overline{DC}=3$, $\overline{OD}=2$, $\overline{AB}=6$，求圓的半徑。



解答: 如圖，設 r 爲圓的半徑，因爲 $\overline{BC}\cdot\overline{BE}=\overline{AB}^2$，所以 $3(\overline{DE}+6)=36$, $\overline{DE}=6$，又 $\overline{DE}\cdot\overline{DC}=\overline{DF}\cdot\overline{DG}$，所以 $18=r^2-4$，得 $r=\sqrt{22}$。 □



19. 一個多項式 $p(x)$ 當它除以 $x-1$ 時有餘式 3，當它除以 $x-3$ 時有餘式 5，求 $p(x)$ 除以 $(x-1)(x-3)$ 的餘式。

解答: **【解法一】** 設 $p(x)=(x-1)(x-3)q(x)+ax+b$，則 $x=1$ 時，$p(x)=3=a+b$；$x=3$ 時，$p(x)=5=3a+b$，解得 $ax+b=x+2$。

【解法二】 由條件可設 $p(x)=(x-1)(x-3)q(x)+a(x-1)+3$，將 $x=3$ 代入得 $p(3)=a(3-1)+3=5$，因此 $a=1$，餘式爲 $x+2$。 □

20. 求最小正奇整數 n 能使乘積 $2^{\frac{1}{7}}2^{\frac{3}{7}}\cdots2^{\frac{2n+1}{7}}$ 大於 1000。(在乘積中，指數的分母都是 7，分子是從 1 到 $2n+1$ 的連續奇數)

解答: $2^{\frac{1}{7}}\cdot2^{\frac{3}{7}}\cdots2^{\frac{2n+1}{7}}=2^{\frac{(n+1)^2}{7}}$，且 $2^{10}=1024$，有 $2^{\frac{(7+1)^2}{7}}=2^{9+\frac{1}{7}}<2^9\cdot2^{\frac{1}{2}}<1000<2^{10}<2^{\frac{(8+1)^2}{7}}$，又 n 爲奇數，故 n 最小爲 9。 □

~全卷完~