國立中山大學應用數學系
高高屏數學研究人才高中培育計畫
九十六學年度　高一班新生甄試

考試日期:　2007.09.22
考試時間:　09:30～11:30

共五題，每題佔20分，滿分100分。答題時，每題都必須寫下題號與步驟。

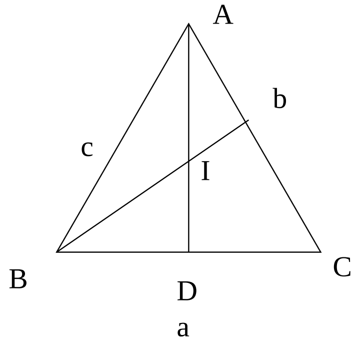
1. 設$n > m \geq 1$，1998^m和1998^n的末位數字相同，試求m和n，使$m+n$最小。

2. (a) 試為方程式
$$x^2+y^2+1=z^2$$
找出無窮多個(x,y,z)的整數解。
(提示：試展開$(2n^2+1)^2$)
   (b) 試為方程式
$$x^2+y^2=z^2$$
找出無窮多個(x,y,z)的整數解。

3. 若x,y,z為實數，且有
$$\begin{aligned} x+y &= \sqrt{4z-1} \\ y+z &= \sqrt{4x-1} \\ x+z &= \sqrt{4y-1} \end{aligned}$$
試求x,y,z三數。

4. 定義$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+...+a_n$ 。試求
   (a) $\sum\limits_{k=1}^{99} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$ 。
   (b) $\sum\limits_{k=1}^{99} \frac{4k}{(4k^4+1)}$ 。

5. (a) 試證角平分線定理，即:若AD是$\triangle ABC$的角平分線(見下圖)，則 $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AC}{CD}$ 。(6%)
提示：延長BA至E，使得$EC//AD$ 。



(b) 設I為$\triangle ABC$的內心，並令$\triangle ABC$的邊長為a,b和c，試證 $\dfrac{AI}{ID}=\dfrac{b+c}{a}$ 。 (7%)

(c) 對上圖三角形，試證$AD^2=AB\cdot AC-AI\cdot ID$ 。 (7%)

~全卷完~