

承辦單位：國立中山大學應用數學系

答案：

1. (3), (4)      2.  $\frac{5}{9} \approx 56\%$       3. 2, 7, 17      4. 240      5. 56
6. 71      7. 12      8. 33      9.  $\frac{5}{6}$       10.  $\frac{1}{2}$
11. 四      12. 5      13.  $\frac{1}{4m}$       14.  $\frac{5\sqrt{5}}{3}$       15.  $36 + \pi$
16.  $2000(\sqrt{2}-1)$       17.  $\frac{30}{11}$       18. 46      19.  $\frac{3}{5}$       20.  $\frac{49}{4} = 12.25$

注意事項：

1. 本試卷共 20 題計算題，每一題 5 分。
2. 考試時間：10：00~12：00。
3. 請將詳細步驟書寫於題目下方空白處，答案必須化簡並書寫於上方指定處。
4. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。

1. 假設  $n^*$  代表計算  $\frac{1}{n}$ ，例如  $5^* = \frac{1}{5}$ ，則下列 (1) 為真。

- (1)  $3^* + 6^* = 9^*$
- (2)  $6^* - 4^* = 2^*$
- (3)  $2^* \cdot 6^* = 12^*$
- (4)  $10^* \div 2^* = 5^*$

解答：每一項計算後得到

$$\begin{aligned} 3^* + 6^* &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{2} \neq 9^* \\ 6^* - 4^* &= \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{-1}{12} \neq 2^* \\ 2^* \cdot 6^* &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{12} = 12^* \\ 10^* \div 2^* &= \frac{1}{10} \div \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{5} = 5^* \end{aligned}$$

故共有 2 種狀況為真。

□

學校：

姓名：

編號：

2. 假設圖表顯示了 1980 年的每個地區按種族劃分的美國人口，且圖表以百萬為單位，則在黑人族群中大約有 (2) (百分比) 的黑人居住在美國的南方。

	東北部	中西部	南部	西部
白人	42	52	57	35
黑人	5	5	15	2
亞洲人	1	1	1	3
其他	1	1	2	4

解答：如圖，有  $5 + 5 + 15 + 2 = 27$  百萬的黑人居住在美國，其中有 15 百萬的居住在南方，故百分比為  $\frac{15}{27} \approx \boxed{56\%}$ 。 □

3. 將  $n$  加入  $\{3, 6, 9, 10\}$  中，使得此五個數字的中位數等於其平均值，則  $n = \underline{(3)}$ 。

解答：情況一：中位數 6，在這種情況下  $n < 6$ ，則

$$\frac{3 + n + 6 + 9 + 10}{5} = 6 \Rightarrow n = 2$$

因此這種情況下有 1 種。

情況二：中位數  $n$ ，在這種情況下  $6 < n < 9$ ，則

$$\frac{3 + 6 + n + 9 + 10}{5} = n \Rightarrow n = 7$$

所以這種情況有 1 種。

情況三：中位數是 9，故  $9 < n$ ，則

$$\frac{3 + 6 + 9 + n + 10}{5} = 9 \Rightarrow n = 17$$

所以這種情況有 1 種。故總共有  $\boxed{3}$  種可能。 □

4. 瑪麗亞買了四個盤子花費五元、以五元的價格賣出三個盤子，則瑪麗亞要賣出 (4) 個盤子才可以賺到 100 元。

解答：由題目可以知道買 12 個盤子花費 15 元，賣出 12 個盤子賺到 20 元，每 12 個盤子可以賺到 5 元。所以要賺到 100 元必須賣出  $12 \times \frac{100}{5} = \boxed{240}$  個盤子。 □

5. 迴文數的定義為整數由左往右念或由右往左念，數字皆會相同。如果忽略冒號，則手錶上顯示的時間為迴文，例如  $\boxed{1:01}$ ， $\boxed{4:44}$  和  $\boxed{12:21}$ ，則從 1 點到 12 點這段時間有 (5) 個迴文數。

解答：當時針為從 1 點到 9 點時，時間的形式為  $a:ba$ 。因此  $a$  有 9 個選擇，且  $b$  有 6 個選擇，故總共有  $9 \times 6 = 54$  種組合。要特別注意的是，當時針為雙位數，也就是從 10 點到 12 點時，分鐘同時也會被固定住，所以只剩下 2 種組合。故總共有  $54 + 2 = \boxed{56}$  個迴文數。 □

6. 傑克有一袋裝有 128 個蘋果的袋子，他賣了 25% 其中給小明，後來他把剩下的蘋果賣了 25% 給小珍，最後他袋子剩下的蘋果中，他又給了他的老師一顆最好的蘋果，則他還剩 (6) 顆蘋果。

解答：第一次給了  $128 \times 0.25 = 32$  顆給小明，所以還剩  $128 - 32 = 96$  顆。後來又給了小珍  $96 \times 0.25 = 24$  顆蘋果，所以還剩下  $96 - 24 = 72$  顆，最後再將 1 顆給老師，故剩下 71 顆。 □

7. 英文字母 A, J, H, S, M, E, 和數字 1, 9, 8, 9 都是個別循環的，如下

AJHSME 1989

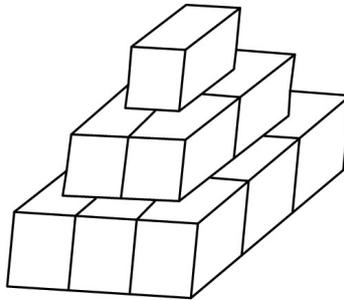
1. JHSMEA 9891
2. HSMEAJ 8919
3. SMEAJH 9198

.....

依照此順序當 *AJHSME* 1989 出現時候，第一次會出現在第 (7) 列。

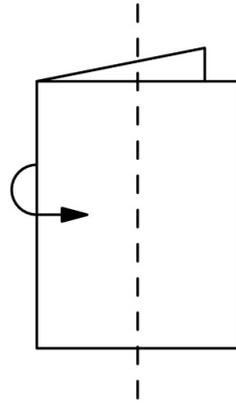
解答：*AJHSME* → *JHSMEA* → ... → *AJHSME* 每隔六列又回到 *AJHSME*。且 1989 → 9891 → 8919 → 9198 → 1989 每隔四列又回到 1989。所以 *AJHSME* 1989 每隔  $[6, 4] = 12$  會回到 *AJHSME* 1989，所以第一次發生在第 12 列。 □

8. 一個藝術家有十四塊正立方體，每塊的邊長都是一公尺，他將他們數在地上形成如圖所示的雕刻品，然後他要將露在外面的部份塗上油漆，則他總共要塗 (8) 平方公尺。



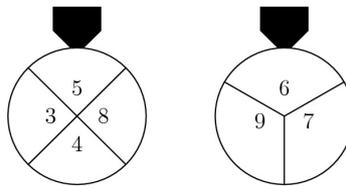
解答：最底層：側邊層有 12 個完整的面，朝上的有 4 個  $\frac{1}{2}$  的面和 4 個  $\frac{3}{4}$  的面。中間層：側邊層有 8 個完整的面，朝上的有 4 個  $\frac{3}{4}$  的面。最頂層：有 5 個完整的面。所以總共  $12 + 4 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{3}{4} + 8 + 4 \times \frac{3}{4} + 5 =$  33 平方公尺。 □

9. 假設有一張正方形的只從中間對摺後，再沿著正中央的虛線剪開就可以展開成三個矩形(一大和兩小)，則小的矩形與大的矩形的周長比值 = (9)。



解答： 假設原本正方形的邊長為 4 單位，則大矩形和小的矩形邊長分別為 4, 2 以及 1, 4，  
 因此周長比為  $\frac{1+4+4+1}{2+4+4+2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ 。 □

10. 有兩個輪盤同時旋轉，指標會指出兩個數字，則指出的兩個數字和為偶數的機率 = (10)。



解答： 已知道奇數加奇數為偶數，偶數加偶數為偶數。第一個輪子轉出奇數的機率為  $\frac{1}{2}$ ，  
 偶數機率為  $\frac{1}{2}$ 。第二個輪子轉出奇數的機率為  $\frac{2}{3}$ ，偶數機率為  $\frac{1}{3}$ 。故相乘出現偶數  
 的機率為  $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 。 □

11. 西元  $N$  年的第 300 天為星期二，又西元  $N+1$  年的第 200 天亦為星期二，則西元  $N-1$  年的第 100 天為星期 (11)。

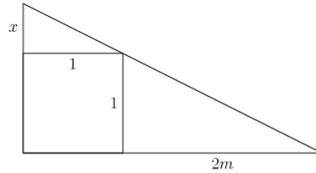
解答： 從西元  $N$  年的第 300 天到西元  $N+1$  年的第 200 天總共有 265 或是 266 天，因  
 為兩天同為星期二，所以之間的天數為 7 的倍數，因此為 266 天，推得西元  $N$  年  
 為閏年。因此從西元  $N-1$  年的第 100 天到西元  $N$  年的第 300 天總共有 565 天。  
 因此  $565 \equiv 5 \pmod{7}$ ，推算為星期四。 □

12. 某天早上，安琪拉的家人喝咖啡與牛乳，總共喝了 8 盎司，且每人喝的咖啡和牛乳加起來恰好一杯的量。已知安琪拉喝了全部牛乳的  $\frac{1}{4}$  和全部咖啡的  $\frac{1}{6}$ ，她家中有 (12) 個成員。

解答： 假設咖啡量為  $c$ ，牛乳量為  $m$ ，家中成員有  $p$  人。依題意得到  $(\frac{c}{6} + \frac{m}{4}) \cdot p = c + m \Rightarrow 2c(6-p) = 3m(p-4)$ ，因為  $c, m > 0$  且  $6-p, p-4 > 0, p \in \mathbb{N} \Rightarrow p = 5$ 。 □

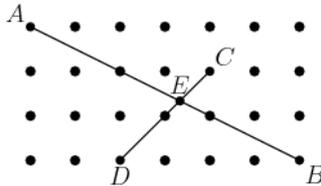
13. 過一個直角三角形斜邊上一點作兩直線，分別平行於兩股，恰好將原三角形分成一個小正方形及兩個小直角三角形。已知其中一個小直角三角形的面積恰為小正方形面積的  $m$  倍，則另一個小直角三角形面積與小正方形面積的比值 = (13)。

解答：依題意畫圖，假設正方形邊長為 1

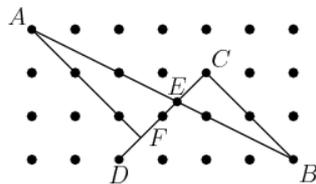


因為有一個小直角三角形的面積為正方形面積的  $m$  倍，所以知道其底為  $2m$ ，假設另一個小直角三角形的高為  $x$ ，利用相似形得到  $\frac{1}{2m} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \frac{1}{2m}$ ，因此另一個小直角三角形的面積為  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2m} \cdot 1 = \frac{1}{4m}$ ，因此所求為  $\frac{1}{4m}$ 。□

14. 如圖，任兩個鉛直或水平相鄰的點都相距 1 單位，已知  $\overline{AB}$  交  $\overline{CD}$  於點  $E$ ，則  $\overline{AE}$  長度 = (14)。



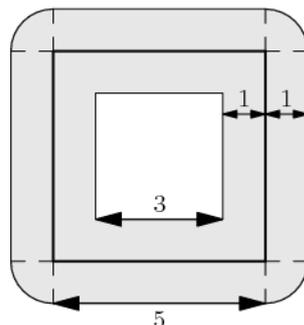
解答：過  $A$  點作一條垂直  $\overline{CD}$  的直線  $\overline{AF}$



因為  $\angle AFE = \angle BCE = 90^\circ$ ， $\angle AEF = \angle CEB$ ，所以  $\triangle AFE \sim \triangle BCE$  (AA 相似)。假設  $\overline{AE} = x$ ，因為  $\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{BC}}$ ，所以  $\frac{x}{3\sqrt{5}-x} = \frac{3\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ 。□

15. 查理繞一個邊長為 5 公里之正方形廣場一圈，且路徑上任一點他均能看到任一方向 1 公里遠的事物，則他繞一圈後視線所及最大範圍總共 (15) 平方公里。

解答：查理所及的視野為灰色面積

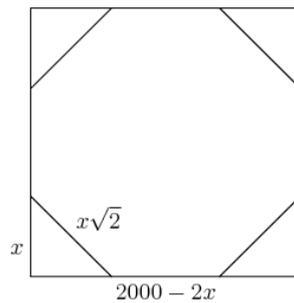


$$\begin{aligned}
 \text{灰色面積} &= \text{大正方形面積} - \text{小正方形面積} + 4 \text{ 個矩形面積} + 1 \text{ 個圓面積} \\
 &= 5^2 - 3^2 + 4(5 \cdot 1) + 1^2\pi \\
 &= 36 + \pi \\
 &\approx 39.14
 \end{aligned}$$

□

16. 有個邊長為 2000 的正方形，若將正方形的四個角落剪去一個等腰直角三角形後成爲一個正八邊形，則此正八邊形的每一邊長 = (16)。

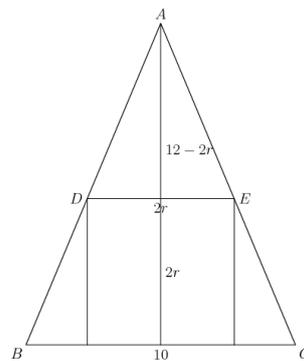
解答： 假設等腰三角形的腰長爲  $x$



得到  $2000 - 2x = x\sqrt{2} \Rightarrow x = 1000(2 - \sqrt{2})$ ，因此正八邊形的邊長爲  $2000 - 2x = 2000 - 2 \cdot 1000(2 - \sqrt{2}) = 2000(\sqrt{2} - 1)$ 。 □

17. 一個圓柱其直徑與高相等且內接於一個直圓錐內，使得直圓柱與直圓錐的軸重合。已知直圓錐的直徑爲 10 且高爲 12，則直圓柱的半徑 = (17)。

解答： 依題意畫出側面圖



假設圓柱的直徑與高皆爲  $2r$ ，利用相似形得到  $\frac{12-2r}{12} = \frac{2r}{10} \Rightarrow r = \frac{30}{11}$ 。 □

18. 圖形是一魔方陣，即每一橫列，每一縱行及每一對角線上所有數的和皆相等。圖中  $v, w, x, y, z$  代表其中五個數，則  $y + z =$  (18)。

$v$	24	$w$
18	$x$	$y$
25	$z$	21

解答：因為  $v + 18 + 25 = v + 24 + w$ ，所以  $w = 19$ ；  
 因為  $w + x + 25 = 24 + x + z$ ，所以  $z = 20$ ；  
 因此每一橫列、縱行的數字和為  $25 + 20 + 21 = 66$ 。  
 推得  $y = 66 - w - 21 = 26$ ，因此所求為  $y + z = 26 + 20 = 46$ 。 □

19. 一盒子中恰放有 5 個圓形籌碼，其中 3 個是紅色，2 個是白色。每一次從盒中任意取出 1 個籌碼，取後不放回，直到所有紅色或所有白色籌碼被取出為止，則白色籌碼先被取完的機率 = (19)。

解答：因為白色籌碼先被抽完，所以最後一個籌碼必為紅色，其餘籌碼可任意排列，因此機率為  $\frac{3}{5}$ 。 □

20. 在梯形  $ABCD$  中， $\overline{AB} \perp \overline{AD}$ ， $\overline{CD} \perp \overline{AD}$ ，且  $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC}$ ， $\overline{AB} < \overline{CD}$ ， $\overline{AD} = 7$ ，則  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} =$  (20)。

解答：假設  $\overline{AB} = x$ ， $\overline{CD} = y$ ，則  $\overline{BC} = x + y$ ，利用畢氏定理得到  $(x + y)^2 = (y - x)^2 + 49 \Rightarrow xy = 12.25$ 。 □

~全卷完~