承辦單位：國立中山大學應用數學系
答案：

1. $\frac{1}{4}$	2. 5	3. 1-2	4. 3	5. 8
6. 14	7. 71	8. 33	9. $\frac{5}{6}$	10. $\frac{1}{2}$
11. 84	12. 3	13. $\frac{15}{8}$	14. 80	15. 69
16. 39	17. 2	18. $16\pi \approx 50$	19. 505	20. 4

注意事項：

1. 本試卷共 20 題計算題，每一題 5 分。
2. 考試時間：10：00∼12：00。
3. 請將詳細步驟書寫於題目下方空白處，答案必須化簡並書寫於上方指定處。
4. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。

---

1. 有八個數字排成一列，其中每一個數均由前兩數相乘而得到，今天列出最後三個數字，試問第一個數字爲多少？

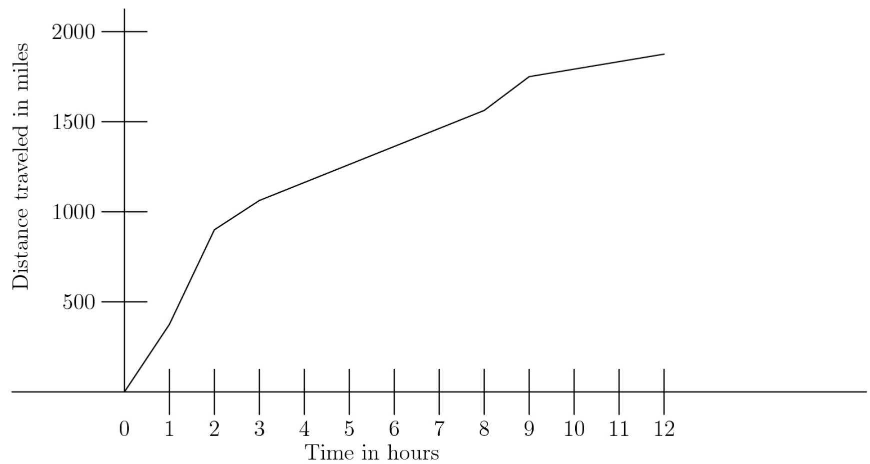
$$\underline{\ ?\ },\ \underline{\quad},\ \underline{\quad},\ \underline{\quad},\ \underline{\quad},\ \underline{16},\ \underline{64},\ \underline{1024}$$

解答： 我們可以用倒推的 $16 \times 64 = 1024$ 倒推後得到 $1024 \div 64 = 16$。故 $64 \div 16 = 4$, $16 \div 4 = 4$, $4 \div 4 = 1$, $4 \div 1 = 4$, $1 \div 4 = \frac{1}{4}$。 □

2. 一群學生(≥ 2 人)圍著一圓桌坐著，他們開始傳遞一個裝有 100 顆糖果的袋子，每人輪流拿一顆，再傳給下一個人。如果克莉絲是拿到第一顆和最後一顆糖果的人，則坐在圓桌邊的學生人數可能有幾種可能？

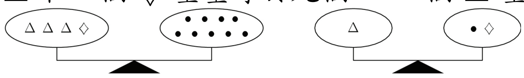
解答： 因爲克莉絲是拿到第一顆和最後一顆糖果的人，則表示學生人數共有 x 人的時候，拿了 y 輪後，共拿了 $xy = 100 - 1 = 99$ 顆，此時恰好剩一顆留給克莉絲拿。故學生人數爲 99 的正因數，3, 9, 11, 33, 99。 □

3. 一實驗性飛機旅程，其旅程距離時間如圖所示，試問在下列哪段時間內，飛機的速度爲最快？



解答： 如圖所示，在 $(1-2)$ 之間飛機大概飛了 500 英里。其速度大概是 500 英哩一小時，而其他任一段時間內的速度均不超過 350 英哩一小時。 □

4. 以天秤秤重，若三個 Δ 和一個 $\diamondsuit$ 重量等於九個$\bullet$，一個 Δ 重量等於 $\diamondsuit$ 加上 $\bullet$ 的總重。



試問兩個 $\diamondsuit$ 等於多少個 $\bullet$？

解答： 假設 $\Delta=a,\ \diamondsuit=b,\ \bullet=c$，則

$$3a+b=9c$$

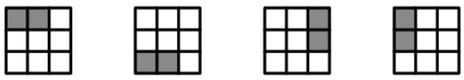
$$a=b+c$$

我們的目標是 $2b$ 可以代換幾個 c，因此我們將上式的 a 換成 $b+c$，得到

$$4b=6c\Rightarrow 2b=3c$$

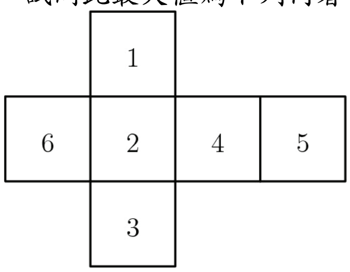
故我們得到 $2\diamondsuit=3\bullet$。 □

5. 若在一個 3×3 的九個格子中只能塗滿其中兩個格子，以形成一個圖樣，且每個圖樣經過任意旋轉或翻轉後，可以和其他圖樣吻合，則都視為同一種圖形。如以下例子，此四個圖樣都看做同一種圖形。試問，依此規則可以塗出多少種不同的圖樣？



解答： 根據對稱性可以先考慮角落有被塗色的圖樣，共有五種。在考慮角落都沒有被塗色的圖樣，共有三種。故總共有八種不同的圖樣。 □

6. 如圖，可沿著線摺成一個表面有數字的正立方體，每個頂點都和三個數相鄰，若其中某個頂點相鄰的三個數之和最大，試問此最大值為下列何者？

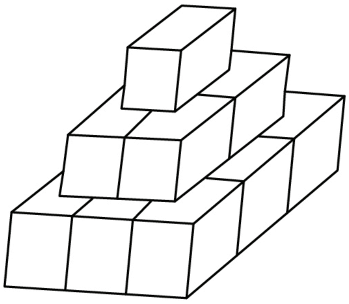


解答： 每個數除了相對的數以外，都可以和其他數與某一個頂點相鄰。所以所有的組合中 $1-3,\ 2-5,\ 4-6$ 都不可能發生，故最大的和為 $6+5+3=14$。 □

7. 捷克有一袋裝有 128 個蘋果的袋子，他賣了 25% 其中給小明，後來他把剩下的蘋果賣了 25% 給小珍，最後他袋子剩下的蘋果中，他又給了他的老師一顆最好的蘋果，所以他還剩多少顆蘋果？

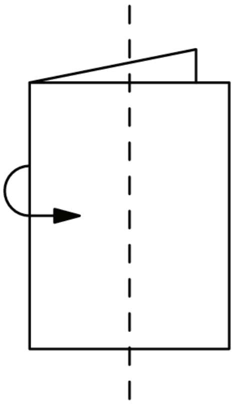
解答： 第一次給了 $128 \times 0.25 = 32$ 給小明，所以還剩 $128 - 32 = 96$。後來又給了小珍 $96 \times 0.25 = 24$ 顆蘋果，所以還剩下 $96 - 24 = 72$，最後再給一顆給老師，故剩下 71。 □

8. 一個藝術家有十四塊正立方體，每塊的邊長都是一公尺，他將他們數在地上形成如圖所示的雕刻品，然後他要將露在外面的部份塗上油漆，則他總共要塗多少平方公尺？



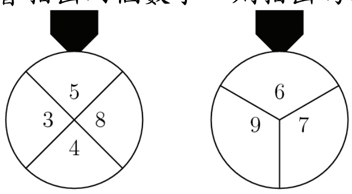
解答： 最下側邊層有 12 個完整的面，最下層朝上的有 4 個 $\frac{1}{2}$ 的面和 4 個 $\frac{3}{4}$ 的面，中間側邊層有 8 個完整的面，中間曾朝上的有 4 個 $\frac{3}{4}$ 的面，最頂層有五個完整的面，所以總共 $12 + 4 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{3}{4} + 8 + 4 \times \frac{3}{4} + 5 = 33$ 平方公尺。 □

9. 假設有一張正方形的只從中間對摺後，再沿著正中央的虛線剪開就可以展開成三個矩形(一大和兩小)，則小的矩形與大的矩形的周長比值爲多少？



解答： 假設原本正方形的邊長爲 4 單位，則大矩形和小的矩形邊長分別爲 4, 2 以及 1, 4，因此周長比爲 $\frac{1+4+4+1}{2+4+4+2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$。 □

10. 有兩個輪盤同時旋轉，指標會指出兩個數字，則指出的兩個數字和爲偶數的機率爲多少？



解答： 已知道奇數加奇數爲偶數，偶數加偶數爲偶數。第一個輪子轉出奇數的機率爲 $\frac{1}{2}$，偶數機率爲 $\frac{1}{2}$。第二個輪子轉出奇數的機率爲 $\frac{2}{3}$，偶數機率爲 $\frac{1}{3}$。故相乘出現偶數的機率爲 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$。 □

11. 同時投擲 7 個公正的 6 面骰子，若頂面點數總和爲 10 的機率可表示爲 $\frac{n}{6^7}$，則 n 爲多少？

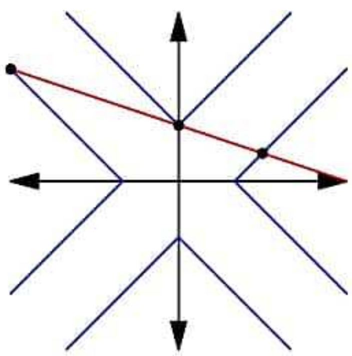
解答：**【解法一】** 骰子的最小值爲 1，因此 7 個骰子的頂面的最小可能總和爲 7。爲了使總和恰好爲 10，1 到 3 個骰子的頂面加總必須爲 3。有三種方法可以做到這一點：3, $2+1$ 和 $1+1+1$。情況一：有 7 種；情況二：有 $7\cdot 6 = 42$ 種；情況二：有 $\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!} = 35$ 種。因此答案爲 $7+42+35 = 84$。

【解法二】 7 個骰子投擲總和爲 10 可以用星星和酒吧表示，有 10 顆星星和 6 個酒吧。每顆星代表骰子面上的一個點，酒吧表示不同骰子之間的區隔。但是，我們必須注意，每個骰子在面上至少有一個點，所以必須預先確定 7 顆星星。剩下 3 顆星星和 6 個酒吧，可重新整理成 $\binom{9}{3} = 84$ 種方式。 □

12. 有多少個實數序對 (x, y) 同時滿足下列兩方程式？

$$x + 3y = 3$$
$$\big||x| - |y|\big| = 1$$

解答：**【解法一】** 我們可以通過繪製方程式來解此題目。將題目中第二個方程式繪製在第一象限中(內部絕對值符號可以忽略)，然後將該圖反映到其他像限中，如圖所示。 由上圖很容易就看到有 3 個交點。



【解法二】 $x + 3y = 3$ 可重新改寫成 $x = 3 - 3y$，將該式代至題目中的第二個方程式，可得 $||3 - 3y| - y| = 1$?將此問題分解爲 y 範圍的情況，將可得出解的總數：

情況一： $y > 1, 3 - 3y$ 將爲負數，所以 $|3 - 3y| = 3y - 3, |3y - 3 - y| = |2y - 3| = 1$。

(1) $y > \frac{3}{2}$
$2y - 3$ 爲正數，所以 $2y - 3 = 1 \Rightarrow y = 2$ 且 $x = 3 - 3(2) = -3$。

(2) $1 < y < \frac{3}{2}$
$2y - 3$ 爲負數，所以 $|2y - 3| = 3 - 2y = 1 \Rightarrow 2y = 2$ 且是沒有解(y 不能等於 1)。

情況二： $y = 1$, 顯然的，$x = 0$。

情況三： $y < 1, 3 - 3y$ 爲正數，所以 $|3 - 3y - y| = |3 - 4y| = 1$。

(1) $y > \frac{4}{3}$
$3 - 4y$ 爲負數，所以 $4y - 3 = 1 \Rightarrow 4y = 4$。這沒有解($y$ 不能等於 1)。

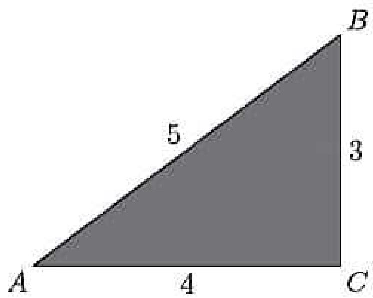
(2) $y < \frac{4}{3}$

$3-4y$ 爲正數，所以 $3-4y=1 \Rightarrow 4y=2$。$y=\frac{1}{2}$ 且 $x=\frac{3}{2}$。

因此，解爲：$(-3,2),\ (0,1),\ \left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$，答案爲 3。

【解法三】 注意到，$||x|-|y||$ 可以取以下四個值中的任意一個：$x+y,\ x-y,\ -x+y,\ -x-y$。求解方程我們得到了三個解：$(0,1),\ (-3,2),\ (1.5,0.5)$。所以答案爲 3。 □

13. 邊長分別爲 3, 4, 5 公寸的三角形紙片，如下圖所示。若將此紙片摺疊使得點 A 與點 B 重合，則摺痕長爲多少公寸？



解答： 首先，我們需要知道 摺線就是邊長 $\overline{AB}$ 的垂直平分線，即直角三角形 $\triangle ABC$ 的斜邊。稱 $\overline{AB}$ 的中點爲 D。繪製這條線並稱此交點與 $\overline{AC}$ 交於 E。現在，根據 AA 相似，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 爲相似。設定比率，我們發現

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{\overline{DE}}{5/2} \Rightarrow \overline{DE}=\frac{15}{8}$$

因此，答案爲 $\frac{15}{8}$。

□

14. 小於或等於 $\frac{3^{100}+2^{100}}{3^{96}+2^{96}}$ 的最大整數是多少？

解答： **【解法一】**

$$\begin{aligned}\frac{3^{100}+2^{100}}{3^{96}+2^{96}} &= \frac{2^{96}\left(3^{100}/2^{96}\right)+2^{96}(2^4)}{2^{96}(3/2)^{96}+2^{96}(1)} = \frac{3^{100}/2^{96}+2^4}{(3/2)^{96}+1}\\ &= \frac{3^{100}/2^{100}\cdot 2^4+2^4}{(3/2)^{96}+1} = \frac{2^4(3^{100}/2^{100}+1)}{(3/2)^{96}+1}\end{aligned}$$

我們可以忽略 1，因爲它們不會眞的影響分數。所以，答案會非常接近，但比新分數少。

$$\frac{2^4(3^{100}/2^{100}+1)}{(3/2)^{96}+1} < \frac{2^4(3^{100}/2^{100})}{(3/2)^{96}}$$

$$\frac{2^4(3^{100}/2^{100})}{(3/2)^{96}} = \frac{3^4}{2^4}\cdot 2^4 = 3^4 = 81$$

所以，我們的最終答案非常接近但不是 81，因此小於數字的最大整數是 80。

【解法二】 令 $x = 3^{96}$ 和 $y = 2^{96}$。那麼我們的分數可以寫成

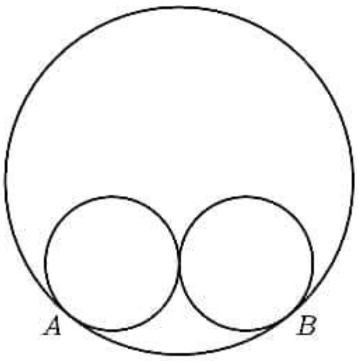
$$\frac{81x+16y}{x+y} = \frac{16x+16y}{x+y} + \frac{65x}{x+y} = 16 + \frac{65x}{x+y}$$

注意到，$\frac{65x}{x+y} < \frac{65x}{x} = 65$。所以，$16 + \frac{65x}{x+y} < 16 + 65 = 81$。而我們唯一的答案選擇要小於 81，也就是 80。

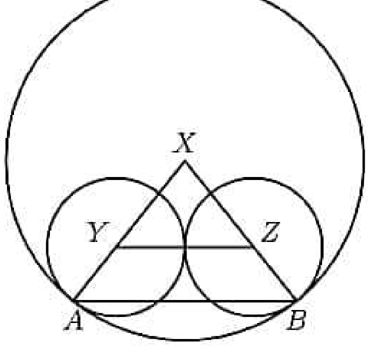
【解法三】 令 $x = \frac{3^{100}+2^{100}}{3^{96}+2^{96}}$，將兩邊同乘 $(3^{96}+2^{96})$，並展開。重新整理各項數後，可得 $3^{96}(3^4 - x) + 2^{96}(2^4 - x) = 0$。等號左邊的式子是嚴格遞減，且當 $x = 81$ 其值爲負數，這意味著，答案必須是小於 81，因此答案爲 81。

□

15. 兩個半徑爲 5 的小圓彼此外切，且分別內切於一個半徑爲 13 的圓於 A、B 兩點，如下圖所示。若 $\overline{AB}$ 可被寫成 $\frac{m}{n}$，其中 m、n 爲互質的正整數，則 $m+n$ 爲多少？



解答：**【解法一】** 令周圍的圓中心爲 X。在 A 點相切的圓，將會以 Y 點爲中心。同樣

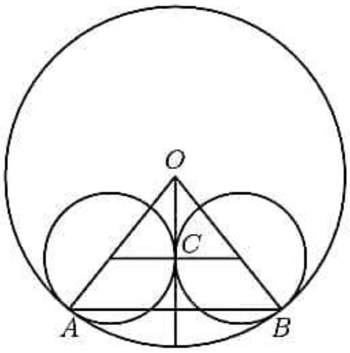


地，在 B 點相切的圓，將會以 Z 點爲中心。將 $\overline{AB}, \overline{YZ}, \overline{XA}$ 和 $\overline{XB}$ 連接起來。現在觀察到 $\triangle XYZ$ 和 $\triangle XAB$ 是相似的，寫出比例，可得

$$\frac{\overline{XY}}{\overline{XA}} = \frac{\overline{YZ}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{13-5}{13} = \frac{5+5}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{8}{13} = \frac{10}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{65}{4}$$

因此，答案爲 $65 + 4 = 69$。

【解法二】 令大圓的中心爲 O，兩個較小圓的公切線爲 C。繪製大圓的兩個半徑，$\overline{OA}$ 和 $\overline{OB}$，以及小圓的兩個半徑指到點 C。繪製射線 $\overrightarrow{OC}$ 和 $\overline{AB}$，這使我們



得到了相似三角形，因此可解此問題。根據畢式定理，斜邊的長度是 8，另一條邊爲 5。利用相似三角形，$\overline{OB}=13$，且 $\overline{AB}$ 的一半爲 $\frac{65}{8}$。因此其兩倍爲 $\frac{65}{4}$，得出答案爲 $65+4=69$。 □

16. 7 個標準骰子的面都標有從 1 到 6 的整數。假設 p 是所有 7 個骰子投擲的機率，頂部數字的總和爲 10。發生與 p 具有相同機率的其它總和是多少？

解答：【**解法一**】 可以看出，盡可能投擲最小數字的機率與投擲最大數字的機率相同，投擲第二小數字的機率可能與投擲第二大數字的機率相同，等等。

這是因爲有多種方法可以將 7 種增加一定數量的方法與從 7 個 6 的組合中拿出一定數量的方法相同。

所以，我們可以匹配這些值來找出與 10 相同機率的和。我們可以開始注意到，7 是最小可能投擲數，而 42 是最大可能投擲數。具有相同機率對如下所示：

$$(7,42),\ (8,41),\ (9,40),\ (10,39),\ (11,38),\ \ldots$$

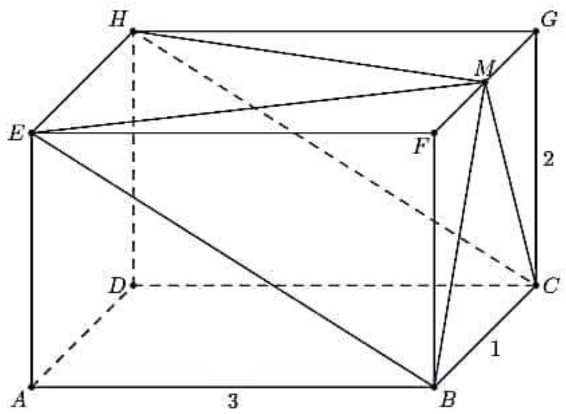
但是，我們需要找到與 10 匹配的數字。所以，我們可以在 $(10,39)$ 停止，並推得等於 10 的機率總和爲 39。所以答案爲 39。

【**解法二**】 我們假設未知數爲 x。根據對稱性，我們知道 10 和最小值之間的差值等於最大值和 x 之間的差值。所以，$10-7=42-x \implies x=39$。

【**解法三**】 對於總和具有相等的機率，7 個骰子的兩個集合平均總和必須是 $(6+1)\times 7=49$。因爲有 10 與沒有 10 是相似的，所以只須從期望的總和中減去 10，$49-10=39$。

【**解法四**】 骰子投擲的總和其期望值是 $3.5\cdot 7=24.5$，且因爲機率應該對稱得分佈，答案是 $24.5+24.5-10=39$。 □

17. 在矩形平行六面體如下圖所示，$\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=1$ 和 $\overline{CG}=2$。點 M 是 $\overline{FG}$ 的中點。矩形金字塔其底部 $BCHE$ 和頂點 M 的體積是多少？



解答：【解法一】 考慮橫截面平面並將其面積標記爲 b。注意到，包圍金字塔的三棱柱的體積爲 $bh/2 = 3$，且我們希望矩形金字塔與三棱柱有共同的底部與高度。金字塔的體積是 $\frac{bh}{3}$，所以答案爲 2。

【解法二】 我們可以從平行六面體的總體積開始找。它是 $2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$，因爲長方體是矩形稜柱。接下來，我們可以考慮當平面 $BCHE$ 切此外形時所形成的楔形截面。

我們可以找到三角形金字塔的底部 EFB 和頂點 M。EFB 的面積是 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$。因爲 $\overline{BC} = 1$，所以我們有 $\overline{FM} = frac12$。利用三角形金字塔體積公式，可得 $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{1}{2}$。此外，由於三角形金字塔其底部 HGC 和頂點 M 具有完全相同的尺寸，所以體積也是 $\frac{1}{2}$。

在最後一步考慮的原始楔形體積爲 3，因爲它是平行六面體體積的一半。而我們可以減去這部份，可得 $3 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$。因此，我們可得到外形的體積爲 2。 □

18. 線段 $\overline{AB}$ 是圓的直徑有 $\overline{AB} = 24$。當點 C 在圓周上移動時，$\triangle ABC$ 的重心，其軌跡爲一條封閉曲線缺少兩點。對於最接近的正整數，該曲線所圍區域的面積是多少？

解答：【解法一】 假設 $A = (-12, 0), B = (12, 0)$。因此，$C$ 位於圓方程式 $x^2 + y^2 = 144$。令它具有坐標 (x, y)。因爲我們知道三角形其 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 的頂點坐標爲 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$，$\triangle ABC$ 的質心是 $\left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right)$。因爲 $x^2 + y^2 = 144$，又我們知道 $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 16$，所以，曲線是一個以原點爲中心的圓，它的面積是 $16\pi \approx 50$。

【解法二】 我們知道三角形的質心是將線段以比例 $2:1$ 切分，並且到圓的中心其三角形的中值是半徑 12，所以從三角形的中心到圓的中心其長度爲 $\frac{1}{3} \cdot 12 = 4$。半徑爲 4 的圓面積爲 16π，大約爲 50。 □

19. 數列 101, 1001, 10001, 100001, ... 前 2018 項的數有多少項可以被 101 整除？

解答：【解法一】 注意到，對於一些奇數 k，$10^{2k} + 1$ 將會滿足 $\mod 101$。每一個 $2k$ 會在 $\{2, 4, 6, \ldots, 2018\}$ 中，所以答案是 505。

【解法二】 如果我們將每個數字除以 101，則就會看到每個數字 4 都有一個模式: 101, 1000001, 10000000001, ...。將 2018 除以 4 得到 504 又剩下 2。一個可分割的數字將會剩下 2，所以答案是 505。

【解法三】 注意到，909 可以被 101 整除，因此，9999 也可以被 101 所整除。我們知道 101 是可被整除的，但不可被 1001 整除，所以可從 10001 開始。計算 $10001-9999=2$。同樣的，計算 $100001-9999\cdot 10=11$。持續用此方式，計算 $1000001-99990\cdot 10=101$。遵循相同的方式，可利用 $\pmod{101}$ 來完成此題。數列將會減去 1，乘以 10，再加上 1。因此數列爲 $0,\ -9,\ -99(2),\ 11,\ 0,\ \ldots$，它每四個重複一次。考慮第一項之後的數列，有 2017 個數字。將 2017 除以 4 得到 504 餘 1。因此，答案爲 504 加上第一項 1 等於 505。 □

20. 假設 $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2018}$ 是一個嚴格遞增的正整數數列，使得

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2018}=2018^{2018}$$

當 $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_{2018}^3$ 除以 6 的餘數是多少？

解答： **【解法一】** 根據 Euler's Totient 定理，$n^3\equiv n\pmod 6$。或者，可以簡單地列出所有的餘數到第三個冪次 $\mod 6$。因此答案與 $2018^{2018}\equiv 2^{2018}\pmod 6=4$ 一致。

【解法二】 注意到，

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+\cdots+a_{2018})^3 = {} & a_1^3+a_2^3+\cdots+a_{2018}^3+3a_1^2\left(a_1+a_2+\cdots+a_{2018}-a_1\right)\\ & +3a_2^2\left(a_1+a_2+\cdots+a_{2018}-a_2\right)+\cdots\\ & +3a_{2018}^2\left(a_1+a_2+\cdots+a_{2018}-a_{2018}\right)+6\prod_{i\neq j\neq k}^{2018}a_ia_ja_k\end{aligned}$$

又注意到，

$$\begin{aligned} & a_1^3+a_2^3+\cdots+a_{2018}^3+3a_1^2\left(a_1+a_2+\cdots+a_{2018}-a_1\right)+\\ & 3a_2^2\left(a_1+a_2+\cdots+a_{2018}-a_2\right)+\cdots+\\ & 3a_{2018}^2\left(a_1+a_2+\cdots+a_{2018}-a_{2018}\right)+6\prod_{i\neq j\neq k}^{2018}a_ia_ja_k\\ \equiv\ & a_1^3+a_2^3+\cdots+a_{2018}^3+3a_1^2(2018-a_1)+3a_2^2(2018-a_2)+\cdots+3a_{2018}^2(2018-a_{2018})\\ \equiv\ & -2(a_1^3+a_2^3+\cdots+a_{2018}^3)\pmod 6\end{aligned}$$

因此，$-2(a_1^3+a_2^3+\cdots+a_{2018}^3)\equiv\left(2018^{2018}\right)^3\equiv\left(2^{2018}\right)^3\equiv 4^3\equiv 4\pmod 6$。因此，$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_{2018}^3\equiv 1\pmod 3$，但是，因爲立方保持奇偶性，而且各個項之和爲偶數，也有些立方也是偶數，答案爲 4。

【解法三】 我們首先注意到 $1^3+2^3+\cdots=(1+2+\cdots)^2$。所以我們可以找到 $\left(2018^{2018}\right)^2=\left(2018^{4036}\right)\mod 6$。另外也注意到 $2018\equiv 2\pmod 6$ 且看到 $2^1\equiv 2\pmod 6,\ 2^2\equiv 4\pmod 6,\ 2^3\equiv 2\pmod 6,\ 2^4\equiv 4\pmod 6$ 等等。所以，我們看到因爲 (2^{4036}) 有偶數次方，它必須是 $\pmod 6$ 同餘 4，得出答案爲 4。 □

～全卷完～

學校：　　　　　　　　姓名:　　　　　　　　編號: