

承辦單位：國立中山大學應用數學系

答案：

1. 46 2. $\frac{1}{80}$ 3. 3 4. 12 5. $\frac{215}{8}$
6. 3 7. 6 8. $\frac{1}{9}$ 9. 12 10. $\frac{25\pi}{4} - 12$
11. $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 12. 3 13. 2 14. 400 15. 10
16. 407 17. 99 18. 8 19. πa^2 20. $\frac{7}{16}$

注意事項：

1. 本試卷共 20 題計算題，每一題 5 分。
2. 考試時間：10：00~12：00。
3. 請將詳細步驟書寫於題目下方空白處，答案必須化簡並書寫於上方指定處。
4. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。

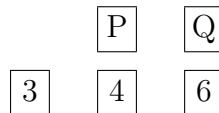
1. 葛林先生每年薪水都會上調 10%，試問四年後他的薪水大約調漲了 = ① %？

解答： 假設葛林先生薪水為 100 元，則第一年薪水為 110、第二年薪水為 121、第三年薪水為 133.1、第四年薪水為 146.41。故大約調漲了 $\boxed{46\%}$ 以上。 □

2. 假設電話號碼為七位整數且第一位號碼不可以為 0 或 1。試問開頭為 9 結尾為 0 的電話號碼機率 = ② ？

解答： 開頭不可以為 0, 1，所以剩 8 種選擇。又規定開頭只能為 9，故機率為 $\frac{1}{8}$ 。且尾數可能有 10 種選擇，但規定只能為 0，故機率為 $\frac{1}{10}$ 。綜合起來，所以機率為 $\boxed{\frac{1}{80}}$ 。 □

3. 五個字卡如圖所示



每張卡片一面為數字、另一面為字母。小珍說：「如果字母面為母音，則另外一面必定為偶數」。瑪莉表示小珍的說法錯誤了，試問瑪莉應該翻哪一張牌 = ③ 證明小珍說法錯誤？

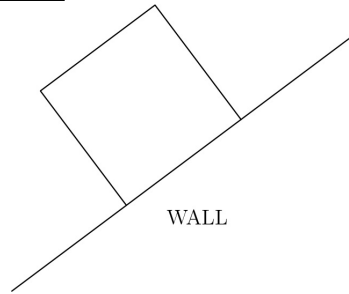
解答： 小珍的說法的反面邏輯為，如果一面不是偶數，則另一面字母必定不是母音。題目可以知道數字卡 3 為奇數，所以瑪莉只能翻開奇數卡，故答案為 $\boxed{3}$ 。 □

學校：

姓名：

編號：

4. 一個長方形的牧場三面都以柵欄圍起來，剩餘的一面是長 100 公尺的石牆。其中柵欄以每隔 12 公尺放置一個欄杆，包括柵欄與石牆的兩個交界處都放置。試問在 36×60 公尺的牧場中，最少放置 = ④ 個欄杆才能圍起柵欄？



解答：在 36×60 公尺的牧場中，因為要放置最少的欄杆，因此假設三邊中的兩邊為 36，且石牆對面的長度為 60 公尺。則可以知道短邊需要放置 $\frac{36}{12} + 1 = 4$ ，長邊需要放置 $\frac{60}{12} + 1 = 6$ 。故總共需要放置 $4 + 4 + 6 = 14$ 個，但因為短邊和長邊交接處會重複計算，故答案為 $14 - 2 = \boxed{12}$ 個。 □

5. 旅途開始時里程表上顯示 56,200 公里。司機加了 6 加侖的油後出發。在旅途中，當司機在里程數為 56,560 時又加了 12 加侖的油。在行程結束時，司機又加了 20 加侖汽油。此時里程表顯示為 57,060。試問汽車一加侖可以跑 = ⑤ 公里？

解答：前六加侖是不影響整體，故可以忽略。里程表從 56,200 開始，且可以知道旅途期間汽車消耗的油量等於司機加入的汽油總數，即 $12 + 20 = 32$ 加侖。且旅程的距離為 $57,060 - 56,200 = 860$ 公里。所以一加侖可以跑 $\frac{860}{32} \approx \boxed{26.9}$ 公里。 □

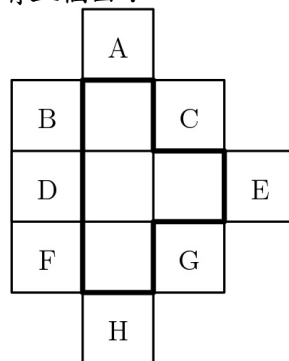
6. 計算 $\frac{(304)^5}{(29.7)(399)^4}$ 的近似值 = ⑥ (最接近的整數)？

解答：

$$\frac{(304)^5}{(29.7)(399)^4} \approx \frac{300^5}{30 \cdot 400^4} = \frac{3^5 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 4^4 \cdot 10^9} = \frac{3^4 \cdot 10}{4^4} = \frac{810}{256}$$

故答案為近似 $\boxed{3}$ 。 □

7. 如圖，有八個正方形上面分別標記八個字母，在中間有四個相同的正方形，呈現 T 字形狀。如果能在這些字母面中選取其中一個進行折疊，試問有幾種 = ⑦ 字母面可以使正方形折疊後的立體圖形只有五個面？



解答：折疊後所有可能為， A 為上方的面，故成立。 B 為左方的面，故成立。 C 為右方的面，故重疊不成立。 D 為左方的面，故成立。 E 為上方的面，故成立。 F 和例子 B 相同，故成立。 G 和例子 C 相同，故不成立。 H 和例子 A 相同，故成立。所以共有 $\boxed{6}$ 個例子。 \square

8. 國王中學的 600 位學生分成三組吃午餐。每組都在不同時間吃午餐，一台電腦隨機分配學生到三組中的其中一組。試問艾倫、包柏、克爾將被分到同一組別機率 = $\underline{\textcircled{8}}$ ？

解答：先假設其中一人被選進某一組，則第二人選到同樣的機率為 $\frac{1}{3}$ 、第三人選到相同的機率也為 $\frac{1}{3}$ ，故三人同組的機率為 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ 。 \square

9. 選擇題有 20 題，計分方式為每對一題 +5 分，每錯一題 -2 分，若沒作答則為 0 分。今天約翰的分數為 48 分，試問約翰最多全部正確的題目共有 = $\underline{\textcircled{9}}$ 題？

解答：假設 c 為答對的題數、 w 為答錯的題數、 b 為未作答的題數。故可以得到

$$c + w + b = 20$$

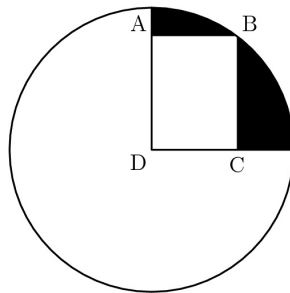
$$5c - 2w = 48$$

整理後得到

$$7c + 2b = 88$$

爲了求得最大的答對題數，故取 $c = 12$, $b = 2$ 符合方程式，得到 $7(12) + 2b = 88 \Rightarrow b = 2$ ，故 $w = 20 - 12 - 2 = 6$ ，則 $c = \boxed{12}$ 。 \square

10. $ABCD$ 爲矩形，且 D 爲圓心， B 爲在圓上的一點。若 $\overline{AD} = 4$, $\overline{CD} = 3$ ，則陰影部分面積 = $\underline{\textcircled{11}}$ ？



解答：觀察圖片可以知道圓半徑就是四邊形 $ABCD$ 的對角線長，故得到 $\overline{BD} = \sqrt{3^2 + 4^2}$, $\overline{BD} = 5$ 。黑色區域的面積爲四分之一圓扣去矩形面積，故 $\frac{1}{4} \times 5^2 \times \pi - 4 \times 3 = \frac{25\pi}{4} - 12 \approx \boxed{7.6}$ 。 \square

11. 有個等比數列的第二項與第四項分別爲 2, 6，請問：此數列的第一項 = $\underline{\textcircled{11}}$ ？

解答：假設公比爲 r 得到 $6 = 2r^2 \Rightarrow r = \pm\sqrt{3}$ ，因此第一項爲 $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $-\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。 \square

12. 請問：式子 $25^{-2} = \frac{5^{48/x}}{5^{26/x} \cdot 25^{17/x}}$ 的解 $x =$ 12 ?

解答：

$$\begin{aligned} 25^{-2} &= \frac{5^{48/x}}{5^{26/x} \cdot 25^{17/x}} \Rightarrow 5^{-4} \left(5^{\frac{26}{x} + \frac{34}{x}} \right) = 5^{\frac{48}{x}} \\ &\Rightarrow 5^{\frac{60}{x} - 4} = 5^{\frac{48}{x}} \\ &\Rightarrow \frac{60 - 4x}{x} = \frac{48}{x} \\ &\Rightarrow 60 - 4x = 48 \\ &\Rightarrow x = 3 \end{aligned} \quad \square$$

13. 有條斜率為 3 的直線與斜率為 5 的直線交於 (10, 15)，請問：此兩條線與 x 軸的交點相距 = 13 ?

解答：依題意得到

$$\begin{cases} y - 15 = 3(x - 10) \Rightarrow y = 3x - 15 \\ y - 15 = 5(x - 10) \Rightarrow y = 5x - 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 3x - 15 \Rightarrow x = 5 \\ 0 = 5x - 35 \Rightarrow x = 7 \end{cases} \Rightarrow 7 - 5 = 2 \quad \square$$

14. A, B, C 三人一同投資 1000 元於不同的方案，每個人一開始投資的金額皆不相同，在一年後結算時，他們總共有 1500 元。已知 B 與 C 獲利一倍，而 A 損失 100 元。請問：A 一開始投資 = 14 元？

解答：假設 A, B, C 投資的金額分別為 a, b, c ，結算時每人都金額為 $a - 100, 2b, 2c$ ，依題意得到

$$\begin{cases} a + b + c = 1000 \\ a - 100 + 2b + 2c = 1500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b + 2c = 2000 \\ a + 2b + 2c = 1600 \end{cases} \Rightarrow a = 2000 - 1600 = 400 \quad \square$$

15. 定義 $\clubsuit(x)$ 為 x 的各位數字和，例如： $\clubsuit(8) = 8$ ， $\clubsuit(123) = 1 + 2 + 3 = 6$ 。請問：有 = 15 個兩位數 x 使得 $\clubsuit(\clubsuit(x)) = 3$ ？

解答：假設 $x = ab$ ，依題意 $\clubsuit(\clubsuit(x)) = 3$ ，得到 $\clubsuit(x) = 3, 12, 21, 30$ 。因為兩位數的各位數字和最大為 18，所以 $\clubsuit(x) = 21, 30$ 不合。若 $\clubsuit(x) = 3$ ，則 $x = 12, 21, 30$ ；若 $\clubsuit(x) = 12$ ，則 $x = 39, 48, 57, 66, 75, 84, 93$ ；因此有 $3 + 7 = 10$ 個兩位數。 \square

16. 正整數 a, b 使得 $3^8 \cdot 5^2 = a^b$ ，請問： $a + b$ 的最小值 = 16 ?

解答：因為 $3^8 \cdot 5^2 = (3^4)^2 \cdot 5^2 = (3^4 \cdot 5)^2 = 405^2$ 且 405 不為完全平方數，所以 $a = 405, b = 2$ ，因此 $a + b = 405 + 2 = 407$ 。 \square

17. 一場網球競賽中有 100 位球員參加且採單淘汰制，已知第一輪有 28 人輪空，剩下的 72 人兩兩對打，接下來的每一次比賽獲勝的人繼續跟其他獲勝的人比賽。請問：產生冠軍時，舉辦比賽的總場數 = 17 ?

學校：

姓名：

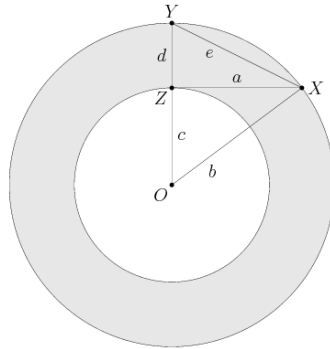
編號：

解答：一開始有 28 人輪空，而 72 人兩兩對打，所以有 36 場比賽；第一輪結束後，有 $28 + 36 = 64$ 位參與接下來的比賽，因此到產生冠軍為止，比賽次數依序為 32, 16, 8, 4, 2, 1，所以總共有 $36 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 99$ 次比賽。 □

18. 有間餐廳提供三種甜點，且前菜的數量是主菜的兩倍，晚餐套餐包含一份前菜、一份主菜、一份甜點。有位顧客在 2003 年每天晚上前來用餐，並要求每天吃的套餐皆不相同。請問：餐廳最少要準備 = 18 種主菜才能滿足此客人的要求？

解答：假設主菜的數量為 m ，則前菜的數量為 $2m$ ，因此有 $(2m) \cdot (m) \cdot (3) = 6m^2$ 種不同的套餐。因為 2003 年是平年，所以總共有 365 天，因此依題意得到 $6m^2 \geq 365 \Rightarrow m^2 \geq 60.83 \Rightarrow m \geq 8$ 。 □

19. 有兩個同心圓，其半徑分別為 b, c 且 $b > c$ 。假設 \overline{OX} 是大圓的半徑， \overline{XZ} 是小圓的切線交小圓於 Z ， \overline{OY} 是過 Z 的大圓半徑。假設 $a = \overline{XZ}$ ， $d = \overline{YZ}$ ， $e = \overline{XY}$ ，請問：兩圓中間的環形面積 = 19 ？

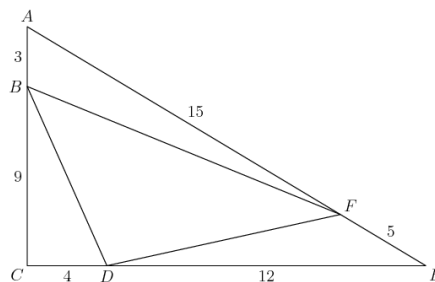


解答：

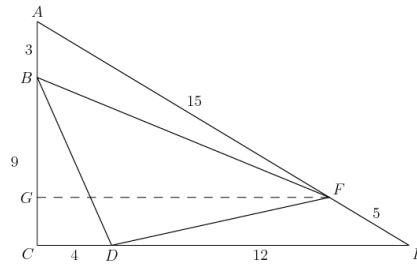
$$\begin{aligned} \text{環形面積} &= \text{大圓面積} - \text{小圓面積} \\ &= b^2\pi - c^2\pi \\ &= \pi(b^2 - c^2) \\ &= \pi a^2 \end{aligned}$$

□

20. 在直角三角形 ACE 中， $\overline{AC} = 12$ ， $\overline{CE} = 16$ ， $\overline{EA} = 20$ ，且點 B, D, F 分別落在 \overline{AC} ， \overline{CE} ， \overline{EA} 上，使得 $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{CD} = 4$ ， $\overline{EF} = 5$ 。請問： $\triangle DBF$ 面積與 $\triangle ACE$ 面積比值 = 20 ？



解答：作一條直線過 F 點且平行 \overline{CE} 交 \overline{AC} 於 G 點



因為 $\triangle AFG \sim \triangle AEC$, $\frac{AF}{AE} = \frac{3}{4}$, 得到 $\overline{GF} = 12$, $\overline{AG} = 9$ 。因此

$$\begin{aligned} \triangle BDF \text{ 面積} &= \triangle ACE \text{ 面積} - \triangle ABF \text{ 面積} - \triangle BCD \text{ 面積} - \triangle DEF \text{ 面積} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3 \\ &= 96 - 18 - 18 - 18 \\ &= 42 \end{aligned}$$

因此所求為 $\frac{42}{96} = \frac{7}{16}$ 。

□

~全卷完~