承辦單位：國立中山大學應用數學系

答案：

1. 80	2. 119	3. $P,\ S$	4. 120	5. 12
6. 10	7. $\frac{5}{12}$	8. 994	9. 6	10. 846
11. 4	12. 162	13. 1400	14. $\frac{36}{5}=7.2$	15. 10
16. 28	17. 20	18. $1,507,509$	19. 12	20. 8181

注意事項：

1. 本試卷共 20 題計算題，每一題 5 分。
2. 考試時間：10：00∼12：00。
3. 請將詳細步驟書寫於題目下方空白處，答案必須化簡並書寫於上方指定處。
4. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。

---

1. 如果矩形的長增加 20% 且寬增加了 50%，則其面積增加 ___①___ %。

解答：假設一個矩形長寬分別爲 10, 10，則面積爲 $10\times 10=100$，如果矩形的長增加 20% 且寬增加了 50%，則面積變爲 $12\times 15=180$，故增加了 $180-100=80$ 或是 $80/100=\boxed{80\%}$。□

2. 小派有很多 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 的標籤，但是只有 22 個 2，他利用這些數字標籤來做一本雜貼簿的頁碼，他最多可以編到第 ___②___ 頁。

解答：數到 100，個位數共需要 10 個 2，而十位數也需要 10 個 2，所以剩下的 2 個只能拿來做 102 和 112。而且可以再做下去直到下個有 2 的數字出現之前，即 $\boxed{119}$ 頁。□

3. 五個跑者 P, Q, R, S, T 比賽賽跑，P 比 Q 快、P 比 R 快、Q 比 S 快，T 跑在 P 後面，但是在 Q 的前面，則 ___③___ 不可能跑第三名。

解答：$P,\ T,\ Q$ 比 S 快，所以 S 不可能第三名，又 P 又爲勝者。所以 P 不可能爲第三，所以可能順序爲 $PRTQS,\ PTRQS,\ PTQRS,\ PTQSR$，故 $T,\ R,\ Q$ 可能爲第三。所以 $\boxed{P \text{ 和 } S}$ 不可能爲第三名。□

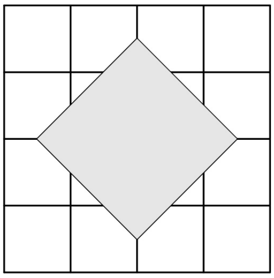
4. 如圖所示，則數字 = ___④___ 正好在 142 上方。

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & 3 & 4 & \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & \cdots & \end{array}$$

解答：觀察最右邊的數字 $1=1,\ 4=2^2,\ 9=3^2,\ 16=4^2,\ 25=5^2,\ \ldots,\ 121=11^2,\ 144=12^2$。依照規律完成幾列後，每一列的最後一個方格內的數字皆爲一個完全平方數，所以包含 142 的那一列是以 144 爲結尾，而他正上方的數字是以 121 結尾，因此 121 是在 $144-1=143$ 的正上方，而 $\boxed{120}$ 是在 $143-1=142$ 的正上方。 □

5. 有一個西洋棋盤裡面是由邊長 1 英吋的正方形格子所組成，有一個正方形紙牌邊長爲 1.5 英吋放置在棋盤上，使得他覆蓋在 n 個部分或全部的正方形區域上，則 n 的最大可能值 $=$ ＿⑤＿。

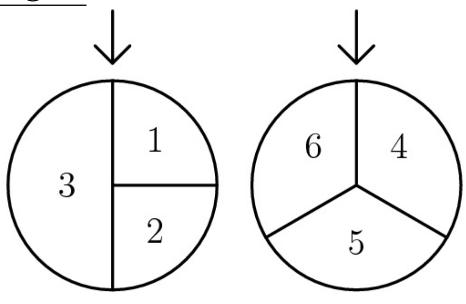
解答：利用畢氏定理，紙牌的對角線長爲 $\sqrt{(1.5)^2+(1.5)^2}=\sqrt{4.5}>2$，比 2 還要長，是兩個鄰近正方形的長度，而圖中表示著 $\boxed{12}$ 個方形被接觸到。 □



6. 一個口香糖機器中有九個是紅色、七個是白色、八個是藍色的口香糖，則最少要買 ＿⑥＿ 個才會確定買到的口香糖有四個相同顏色的口香糖。

解答：可能得到四個相同顏色的口香糖，可以買 4, 5, 6, 7, 8, 9。但是九個可能爲每個顏色各三個，代表沒有四個顏色相同，故爲了一定要有四個相同的顏色，最少要買 $\boxed{10}$ 個。 □

7. 如圖，有兩個輪盤上各標有數字，今天同時轉動輪盤，將轉出的兩個數字相加，則這兩數總和爲偶數的機率 $=$ ＿⑦＿。



解答：已知道奇數 + 奇數，偶數 + 偶數皆爲偶數。第一個輪子轉出奇數的機率爲 $\frac{2}{3}$，偶數機率爲 $\frac{1}{3}$。第二個輪子轉出奇數的機率爲 $\frac{1}{3}$，偶數機率爲 $\frac{2}{3}$。故兩奇數跟兩偶數出現的機率爲 $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{5}{12}}$。 □

8. 假設 X, Y, Z 為 0 ~ 9 中不同的整數，則試問 $XXX + YX + X$ 所得之最大的三位數字 = ___⑧___。

$$\begin{array}{r} X\ X\ X \\ Y\ X \\ +\quad\ \ X \\ \hline \end{array}$$

解答：總和要三位數故代表 XXX 中 X 不可以為 9，否則會為千位數字，故我們試試看 X 最大值為 8，那麼 $XXX + YX + X = 888 + Y8 + 8$，代表取 $Y = 9$ 也不會進位到千位數字，故取 $Y = 9$，得到和為 994，也就是 $\boxed{YYZ}$ 的形式。 □

9. 一個 2×2 的正方形分成四個 1×1 的正方形，如果每一個小的正方形都被塗上綠色或是紅色的油漆，則有 ___⑨___ 不同的方法使得每一個綠色的區域其上或右均不為紅色。(有可能全都沒綠色或是全都是綠色)

解答：如果一個紅色區塊不能在綠色區塊其頂部或右側，則紅色方塊不能與綠色正方形共享其底部或左側。我們把它分成幾種情況討論。

情況一：沒有綠色方塊。有 1 種方法。

情況二：有一個綠色正方形和三個紅色方塊。綠色正方形必須落在右上側才可以，所以有 1 種方法。

情況三：有兩個綠色方塊和兩個紅色方塊。當兩個綠色正方形均在正上方或是兩個均在右邊才可以，所以有 2 種方法。

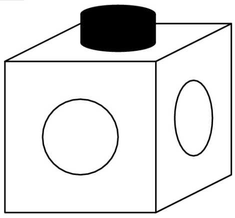
情況四：有三個綠色方塊和一個紅色方塊。類似於情況二，當紅色方塊落在左下側會才可以，所以有 1 方法。

情況五：有四個綠色方塊和零個紅色方塊。有 1 種方法。故總共有 $1+1+2+1+1 = \boxed{6}$ 種方法。 □

10. 試問 $\underbrace{9999\cdots99}_{94\text{ 個}} \times \underbrace{4444\cdots44}_{94\text{ 個}}$ 乘開後的各位數字總和 = ___⑩___。

解答：我們需要找出各位數和的規律，所以我們從最簡單的 $9 \cdot 4$ 開始觀察，得到 $9 \cdot 4 = 36$，而其數字和為 $9 = 9 \cdot 1$；$99 \cdot 44 = 4356$，而其數字和為 $18 = 9 \cdot 2$；$999 \cdot 444 = 443556$，而其數字和為 $27 = 9 \cdot 3$。由此規律可得知若有 94 個數字的話，代表數字和為 $9 \cdot 94 = \boxed{846}$。 □

11. 一個塑膠六面體積木，其中一面有一突出的地方，其他五面都有洞，而突出的地方剛好可以塞進洞面，則最少要用 ___⑪___ 塊積木組合才能讓我們只看到洞而不看到突出的地方。



解答：使用兩個一組會有一個地方突出，使用三個一組也會有一個地方突出，若使用四個一組的話，則每一突出面和凹面相合，剛好可以包含所有的凸出面，因此答案為 $\boxed{4}$。 □

12. 6545 可以分解成兩個二位數字的乘積，則此兩個二位數字之和 = ___12___ 。

解答： 做 6545 的質因數分解得到 $5\times7\times11\times17$。由因式分解將 6545 拆解成兩個兩位數相乘，則得到以下組合

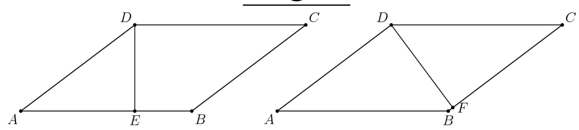
$$
\begin{aligned}
&5\times7=35,\ 11\times17=187,\ (X)\\
&5\times11=55,\ 7\times17=119,\ (X)\\
&5\times17=85,\ 7\times11=77,\ (\surd)\\
&85+77=\boxed{162}
\end{aligned}
$$

□

13. 有 ___13___ 個四位正整數千位數爲奇數，百位數爲偶數，而且四個位數都不一樣。

解答： 奇數有 1, 3, 5, 7, 9 共五個，故千位數有五個選擇。偶數有 0, 2, 4, 6, 8 共五個，故百位數也有五個選擇。剩下兩位數字不可以重複，扣除前面已經選過的兩個數字，故還有 8×7 種選擇。所以總共會有 $5\times5\times8\times7=25\times56=\boxed{1400}$ 種組合。 □

14. 平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{DE}$ 爲 $\overline{AB}$ 上的高。且 $\overline{DF}$ 爲 $\overline{BC}$ 上的高。若 $\overline{DC}=12$, $\overline{EB}=4$ 且 $\overline{DE}=6$，則 $\overline{DF}=$ ___14___ 。



解答： 注意 $\overline{DE}(\overline{AB})=\overline{DF}(\overline{BC})=\square ABCD$，我們嘗試找出 $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, $\overline{DE}$。首先由平行四邊形得知 $\overline{DE}=6$ 和 $\overline{AB}=\overline{CD}=12$，且 $\overline{AD}=\overline{BC}$。因爲 $\angle DEA$ 爲直角，故由畢氏定理得到

$$
\begin{aligned}
(\overline{AE})^2+(\overline{ED})^2&=(\overline{AD})^2\\
\sqrt{(\overline{AB}-4)^2+6^2}&=\overline{AD}\\
&=\sqrt{8^2+36}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10\\
\overline{AD}&=\overline{BC}=10
\end{aligned}
$$

因此，$6(12)=\overline{DF}(10)\Rightarrow\overline{DF}=\frac{72}{10}=\boxed{7.2}$ □

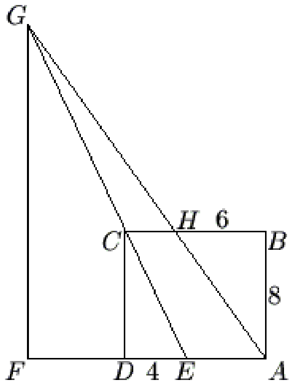
15. 從達拉斯到休士頓的巴士，整點時候會發車且每小時出發一次。從休士頓到達拉斯的巴士，30 分鐘的時候發車，每小時出發一次。而兩城市之間的車程要五個小時，假設巴士都行駛在同一個高速公路上面。則在每一輛前往休士頓的巴士會遇到達拉斯巴士 ___15___ 次。(車站內不算)

解答： 假設一輛從達拉斯往休士頓的巴士下午六點開始出發，則巴士將在下午十一點時候抵達休士頓。期間遇到從休士頓出發的巴士是從下午 1 : 30, 2 : 30, 3 : 30, ..., 9 : 30, 10 : 30 出發的車子，故總共有 $\boxed{10}$ 輛巴士。 □

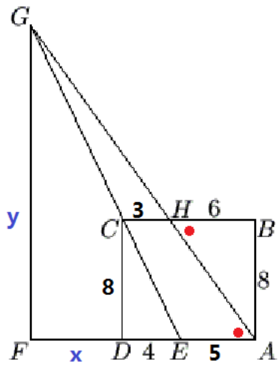
16. Pat 從只有裝巧克力餅、燕麥餅及花生餅(每種餅乾至少有 6 個且同類餅乾均視爲一樣)的盤子中任選取 6 個餅乾，則有 ___16___ 種不同的選法。

解答： 所求方法數爲 $H^3_6 = \binom{8}{6} = \binom{8}{2} = 28$ 種。 □

17. 在矩形 $ABCD$ 中，$\overline{AB} = 8,\ \overline{BC} = 9$，$H$ 點落在 $\overline{BC}$ 上使得 $\overline{BH} = 6$，E 點落在 $\overline{AD}$ 上使得 $\overline{DE} = 4$，直線 $\overleftrightarrow{EC}$ 交直線 $\overleftrightarrow{AH}$ 於 G 點，且 F 點落在 $\overleftrightarrow{AD}$ 上使得 $\overline{GF} \perp \overline{AF}$。則 $\overline{GF} =$ ___⑰___。



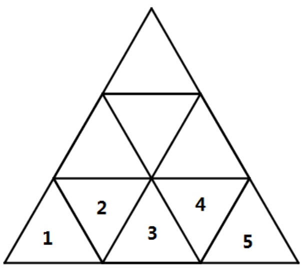
解答： 假設 $\overline{FD} = x,\ \overline{GF} = y$



因爲 $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$，所以 $\angle BHA = \angle HAD$，因此 $\triangle BHA \sim \triangle FAG$，推得 $\frac{6}{8} = \frac{5+4+x}{y} \Rightarrow 3y = 4x + 36$。因爲 $\overline{CD} \perp \overline{AF},\ \overline{GF} \perp \overline{AF}$，所以 $\triangle ECD \sim \triangle EGF$，推得 $\frac{4}{8} = \frac{4+x}{y} \Rightarrow y = 2x + 8$。

$$\begin{cases} 3y = 4x + 36 \\ y = 2x + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{FD} = x = 6 \\ \overline{GF} = y = 20 \end{cases}$$ □

18. 每三根牙籤可造出一個正三角形，而這些小正三角形可分層堆成大正三角形，如圖所示。欲堆成底層共有 2003 個小正三角形的大正三角形共需要 ___⑱___ 根牙籤。



解答： 第 1 層有 1 個三角形，需要 $3 \cdot (1) = 3$ 根牙籤；

第 2 層有 3 個三角形，總共需要 $3\cdot(1+2)=9$ 根牙籤；
第 3 層有 5 個三角形，總共需要 $3\cdot(1+2+3)=18$ 根牙籤；
因此第 1002 層有 2003 個三角形，總共需要 $3\cdot(1+2+3+\cdots+1002)=3\cdot\left(\frac{(1+1002)\cdot 1002}{2}\right)=3\times 502,503=1,507,509$ 根牙籤。 □

19. Sally 有五張編號為 1 至 5 的紅牌及四張編號 3 至 6 的藍牌，她將這些牌排成一列，使得紅、藍交錯相間且使得紅牌號碼數會整除相鄰的藍牌號碼數。則中間三張牌的號碼總和 = ___19___。

解答： 假設紅牌與藍牌的號碼記為 $R_i,\ B_j$
因為 B_3 為質數，所以 $R_1,\ R_3$ 必與其相鄰。
因為 B_5 為質數，所以 $R_1,\ R_5$ 必與其相鄰。
因為 B_6 比紅色任一張都還大，所以 $R_2,\ R_3$ 必與其相鄰。
最後剩下 B_4 必與 R_4 相鄰。
因此得到 $\{R_5,\ B_5,\ R_1,\ B_3,\ R_3,\ B_6,\ R_2,\ B_4,\ R_4\}$，中間三項和為 $3+3+6=12$。
□

20. 假設 n 是一個五位數，$q,\ r$ 分別為 n 除以 100 的商數及餘數。則有 ___20___ 個 n 可以使得 $q+r$ 是 11 的倍數。

解答： 依題意得到 q 為三位數，所以有 900 個數；若將 $r=1,\ 2,\ \ldots,\ 99$ 個別分成除以 11 之同餘為一組，則每組的個數皆為 9 個；此時共有 $900\cdot 9=8100$ 個數。
若 $r=0$，則 q 為 11 的倍數，此時 q 有 $\left\lfloor\frac{900}{11}\right\rfloor=81$ 個數。
因此總共有 $8100+81=8181$ 個數。 □

～全卷完～