承辦單位：國立中山大學應用數學系

答案：

1. 1, 4, 7	2. 9	3. 11	4. 3.5	5. $\pi/10=0.1\pi$
6. 18	7. 3932	8. 15/2=7.5	9. 1/3	10. 238π
11. 14	12. 4	13. $4+3\sqrt{2}$	14. 12	15. 0.01
16. 8	17. $3:1$	18. 15	19. $\frac{7}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$	20. $\frac{25}{2}$

注意事項：

1. 本試卷共 20 題計算題，每一題 5 分。
2. 考試時間：10：00∼12：00。
3. 請將詳細步驟書寫於題目下方空白處，答案必須化簡並書寫於上方指定處。
4. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。

---

1. 若七位數 $\underline{74A52B1}$ 與 $\underline{326AB4C}$ 均爲 3 的倍數，則數字 C 可能爲何？

解答: 數字的總和會被 3 整除。$74A52B1$ 因爲它是被 3 整除。因此，$7+4+A+5+2+B+1$ 除 3 也是等於 0。$7+4+5+2+1\equiv 1 \pmod 3$ 所以 $A+B\equiv 2 \pmod 3$，$326AB4C\equiv 0 \pmod 3$，所以 $3+2+6+A+B+4+C=15+A+B+C\equiv 0 \pmod 3$，因爲 $A+B+C\equiv 0 \pmod 3$，我們可以用 2 代替 $A+B$，所以 $2+C\equiv 0 \pmod 3$，因此 $C\equiv 1 \pmod 3$，這意味著 C 能夠是 1, 4 或 7。 □

2. 若一個二位數滿足其兩個位數的數字乘積加上兩個位數的數字和恰等於這兩個二位數，則此二位數的個位數字爲何？

解答: 假設這個數字爲 $10a+b$，其中 a 是 $1, 2, \ldots, 9$ 和 b 是 $0, 1, \ldots, 9$。二位數等於 $(a\cdot b)$ 加上數字的總和 $(a+b)$，我們可以說 $10a+b=a\cdot b+a+b$。我們可以簡化這個到 $10a=a\cdot b+a$，$(10)a=(b+1)a$。
透過分解，我們可得 $b+1=10$。因此 b 是 $\boxed{9}$。 □

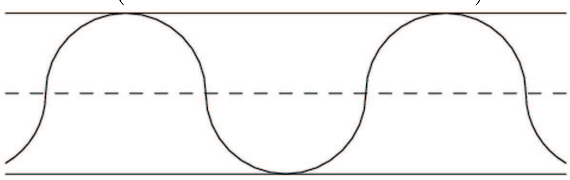
3. 某中學女子壘球隊中的三位球員有以下的對話。
小敏說：「我發現我們球隊球衣的號碼都是二位數的質數。」
小貝說：「你們兩個人球衣號碼的和剛好是我這個月稍早生日的日期。」
小琳說：「眞有趣，你們兩個人球衣號碼的和剛好是我這個月稍後生日的日期。」
小敏說：「你們兩個人球衣號碼的和剛好是今天的日期。」
試問小琳球衣的號碼爲何？

解答: 每個月份天數的最大值爲 31，最小的 2 位數質數是 11，13，和 17，以上三數之不同總和可以有以下數字，它們爲 24，30 和 28，所有數值都表示大約三天內推測。因此，由於小貝說，另外兩個人的號碼較早，因此意味著小琳和小敏的數總和爲 24。同樣地，小琳說，另外兩個人的號碼較晚，所以總和必須爲 30。這可知 28 爲今天的日期。由此看來，小琳指的是 13 和 17。因此告訴我們她的號碼是 11，讓我們可得答案爲 11。 □

4. 某天班老闆共賣了 252 罐汽水給 100 位顧客，每位顧客都至少買一罐汽水。試問這些顧客所買汽水罐數最大可能的中位數爲多少？
(注意：一組數若有偶數個，由小排到大，最中間兩個數的平均值稱爲這組數的中位數)

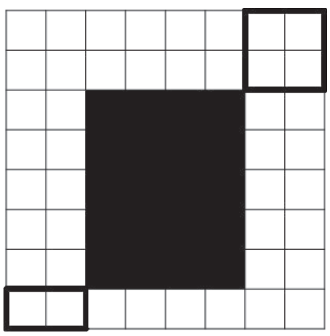
解答: 爲了最大化中位數，我們需要使所有數字的前一半越小越好。由於有 100 個人，中位數是第 50 個客人和第 51 個客人最大的數值平均值。爲了最小化，前 49個客人，他們都各買 1 罐。從 252 罐中減去這 49 罐。剩餘的 203 罐留下給 51 人平分。$\frac{203}{51}$ 整數爲 3 餘數爲 50。由此得知，第 50 個人最多 3 罐，第 51 個人最多 4 罐。所以可得中位數爲 3 和 4 的平均數 3.5。 □

5. 有一條 1 英哩長、40 英呎寬的封閉公路，小羅騎單車沿著半圓形組成的路線騎完這條封閉公路，如圖所示。若小羅以每小時 5 英哩的速率騎車，則他需要花多少小時才能騎完這 1 英哩長的封閉公路？ (注意：1 英哩 = 5280 英呎)



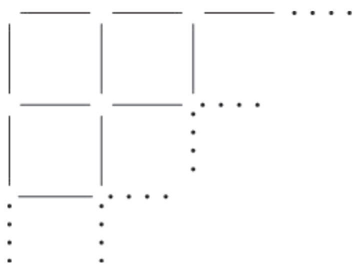
解答: 道路可視爲兩個車道，則每個車道爲 20 英呎寬，所以小羅騎著他的自行車在半圓形用半徑 20 英呎，也就是直徑 40 英呎。由於道路總長爲 5280 英呎長。所以可得 $\dfrac{5280}{40} = 132$ 圈的圓形的實心圓。它們的周邊爲 $2\pi \cdot 20 = 40\pi$，而半圓的周長爲 20π。因此在公路上，小羅總共騎 $132 \cdot 20\pi = 2640\pi$，相當於 $\frac{\pi}{2}$ 英哩。小羅以每小時 5 英哩的速度騎車。所以每小時 5 英里除 $\frac{\pi}{2}$ 英哩，$\boxed{\dfrac{\pi}{10}}$ 個小時可到達。 □

6. 薩曼莎住在城市公園西南角的西邊 2 個街區且在南邊 1 街區。她的學校在城市公園的東北角的東邊 2 個街區且在北邊 2 個街區。在學校的日子，她在街道城市公園的西南角騎自行車，然後採取對角線路徑穿過公園的東北角，然後在街道上騎自行車去上學。試問：如果她的路線是盡可能地縮短，她有多少種不同的路線可以走？



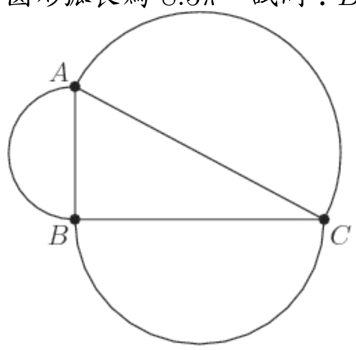
解答: 薩曼莎從家出發去城市公園途徑 $\binom{3}{1} = 3$，從城市公園到學校途徑 $\binom{4}{2} = 6$，既然我們要經過城市公園(對角線直接通過)的一種方法。故從薩曼莎的家出發去城市公園然後到學校共有 $3 \cdot 6 = \boxed{18}$ 種方法。 □

7. 利用牙籤製作一個網格，長 60 根牙籤和寬 32 根牙籤。試問：總共需要多少根牙籤？



解答: 牙籤的寬度一行 32 根，共有 61 列(垂直且互相平行的牙籤)，牙籤的長度一行 33 根，共有 60 列(水平且互相平行的牙籤)。因此我們的答案是 $61 \cdot 32 + 33 \cdot 60 = \boxed{3932}$。 □

8. 設 $\triangle ABC$ 是一個直角三角形。如圖所示，$\triangle ABC$ 的邊爲半圓的直徑。且 $\overline{AB}$ 上的半圓面積爲 8π 和 $\overline{AC}$ 上的半圓形弧長爲 8.5π。試問：$\overline{BC}$ 半圓上的半徑爲多少？

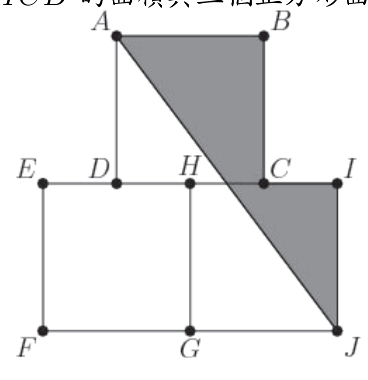


解答: 【**解法一**】 若 $\overline{AB}$ 上的半圓是一個完整的圓，則面積爲 16π。且直徑可知爲 8。而 $\overline{AC}$ 上的半圓形弧長爲 8.5π，便可得知直徑爲 17。因此從畢氏定理我們可知 $\overline{BC}$ 爲 15。故可得其半徑爲 $\boxed{7.5}$。

【**解法二**】 我們在上一個方法中可得知 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 圓的直徑。由於最大的面積 = 另兩個面積之和。則 $\frac{289\pi}{8} - \frac{64\pi}{8} = \frac{225\pi}{8}$。故所求半徑爲 $\frac{15}{2} = \boxed{7.5}$。

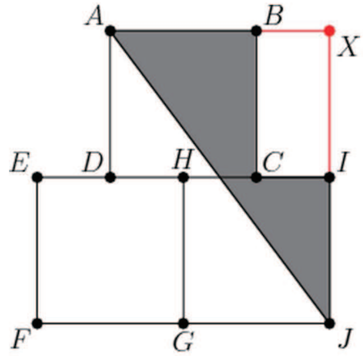
□

9. 正方形 $ABCD$、$EFGH$ 和 $GHIJ$ 面積均相等。點 C 和 D 是兩側 $\overline{IH}$ 和 $\overline{HE}$ 的中點。試問：陰影五邊形 $AJICB$ 的面積與三個正方形面積之總和的比是多少？



解答: 【**解法一**】 我們可以很明顯的看出，如圖中有兩個全等三角形。而我們將下方三角形向上旋轉剛好就是一個正方形。因此答案爲 $\boxed{\frac{1}{3}}$。

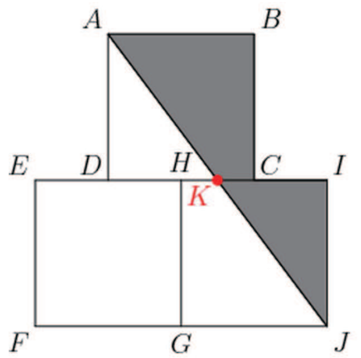
【解法二】



設正方形邊長 $s=2$，我們將 $\overline{IJ}$ 和 $\overline{AB}$ 擴展延伸。且假設交叉的點爲 X。而 $\triangle AXJ$ 的面積爲 $\dfrac{3\cdot 4}{2}$。且 $BXIC$ 面積爲 $2\cdot 1=2$。因此陰影面積爲 $6-2=4$，即爲正方形面積。故 $\frac{4}{3\cdot 2^2}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$。

【解法三】　假設正方形邊長爲 1。令 $\overline{AJ}$ 和 $\overline{EI}$ 延伸的交集點爲 X。因爲 $ABCD=GHIJ$，$\overline{AD}=\overline{IJ}$。且 $\angle IXJ$ 和 $\angle AXD$ 都是直角。所以他們是全等，故 $\angle JIH\cong\angle ADC$ 所以我們有 $\triangle ADX\cong\triangle JIX$ (AAS)。因此，$\overline{DX}=\overline{JX}$。由於 C 和 D 是邊上的中點 $\overline{DH}=\overline{CJ}=\dfrac{1}{2}$。再加上 $\overline{DX}=\overline{JX}$，$\overline{HX}=\overline{CX}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$。梯形 $ABCX$ 面積爲 $\dfrac{1}{2}(AB+CX)(BC)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{4}\times 1=\dfrac{5}{8}$。$\angle JIX$ 爲 $\dfrac{1}{2}\times XJ\times IJ=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times 1=\dfrac{3}{8}$。因此 $AJICB$ 面積爲 $\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{8}=1$。三個正方形面積爲 $1\times 3=3$。故 $\dfrac{[AJICB]}{[ABCIJFED]}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$。

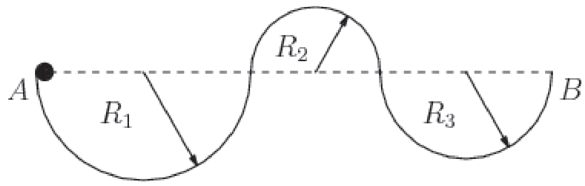
【解法四】



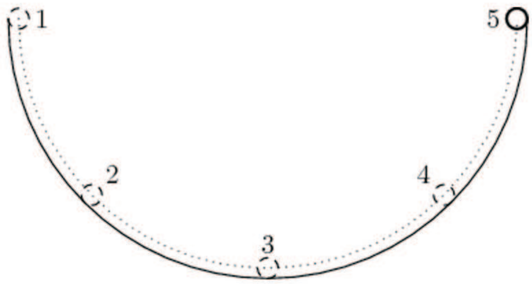
令 $\overline{AJ}$ 和 $\overline{EI}$ 延伸的交集點爲 K。現在有 $\triangle ADK$ 和 $\triangle KIJ$。因爲兩個三角形全等，$AD\cong IJ$，由於 $\angle AKD$ 和 $\angle JKI$ 有 $\angle AKD\cong\angle JKI$。$\angle ADK$ 和 $\angle JIK$ 有 $\angle ADK\cong\angle JIK$。因爲 (AAS) $\triangle ADK\cong\triangle KIJ$，$\triangle JIK$ 透過旋轉平移至 $\triangle ADK$，所以陰影處已經完全覆蓋正方形 $ABCD$。

設覆蓋面積爲 x，故 $\frac{x}{3x}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$。　□

10. 一個直徑 4 英寸的球。開始於 A 點沿所示的軌跡滾動。該軌道由 3 個半圓弧形成，其半徑爲 $R_1=100$ 英寸，$R_2=60$ 英寸和 $R_3=80$ 英寸。球總是保持與軌道接觸，並且不打滑。試問：球的圓心從 A 開始行進到 B 的距離爲多少？



解答: **【解法一】** 球的半徑爲 2 英寸。仔細想想球滾動或繪製路徑球 (見下圖)。



可以發現球在滾動 A 和 C 半圓時，圓心實際滾動距離比原來少了 $2\pi * 2/2 = 2\pi$ 英寸。而滾動 B 卻增加了 2π。故所求爲 $\frac{200+120+160}{2} * \pi + (-2-2+2) * \pi = 240\pi - 2\pi = \boxed{238\pi}$。

【解法二】 計算所有圓弧的總長度可得 $100\pi + 80\pi + 60\pi = 240\pi$。由於我們想要的圓心的軌跡路徑，因此唯一的答案就是少於 240π 即爲 $\boxed{238\pi}$。 □

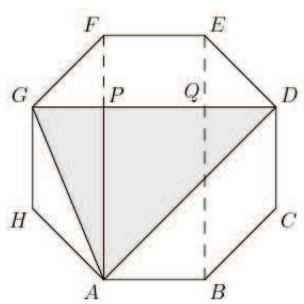
11. 已知正整數 N 滿足 $N^2 = 25^{64} \cdot 64^{25}$，請問：$N$ 的各位數字和爲何？

解答: 因爲 $N^2 = 25^{64} \cdot 64^{25} = 5^{128} \cdot 2^{150} = (5^64 \cdot 2^{75})^2$，所以 $N = 5^{64} \cdot 2^{75} = 2^{11}(5^{64} \cdot 2^{64}) = 2048 \cdot 10^{64}$，因此各位數字和爲 $2+0+4+8 = 14$。 □

12. 請問：有多少個整數 n 使得 $\frac{n}{20-n}$ 是一個完全平方數？

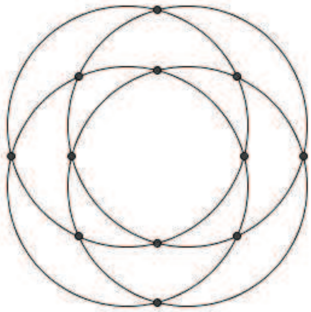
解答: 假設 $x^2 = \frac{n}{20-n}$, $x \geq 0$，得到 $n = \frac{20x^2}{x^2+1}$，且 $\gcd(x^2, x^2+1) = 1$，因此 x^2+1 是 20 的因數。找到 $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \Rightarrow n = 0,\ 10,\ 16,\ 18$，因此有 4 個。 □

13. 正八邊形 $ABCDEFGH$ 的邊長爲 2，請問：$\triangle ADG$ 的面積爲何？



解答: 因爲邊長爲 2，所以 $\overline{PG} = \overline{QD} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, $\overline{PQ} = 2$，推得 $\overline{PA} = 2+\sqrt{2}$，因此面積爲 $\frac{1}{2} \cdot \left(2+2\sqrt{2}\right) \cdot \left(2+\sqrt{2}\right) = 4+3\sqrt{2}$。 □

14. 四個相異的圓同時畫在平面上，請問：最多有多少個交點？



解答: 任兩個圓有兩個交點，因此有 $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$ 個交點。 $\square$

15. 假設 $\{a_n\}$ 是個等差數列，已知

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 100 \\ a_{101} + a_{102} + \cdots + a_{200} = 200 \end{cases}$$

請問：$a_2 - a_1$ 的值爲何？

解答: 假設公差爲 d，將兩式相減得到 $100 \cdot 100 \cdot d = 200 - 100 = 100 \Rightarrow d = \frac{1}{100}$，因此 $a_2 - a_1 = d = 0.01$。 $\square$

16. 有間餐廳提供三種甜點，且前菜的數量是主菜的兩倍，晚餐套餐包含一份前菜、一份主菜、一份甜點。有位顧客在 2003 年每天晚上前來用餐，並要求每天吃的套餐皆不相同。請問：餐廳需要準備多少種主菜才能滿足此客人的要求？

解答: 假設主菜的數量爲 m，則前菜的數量爲 $2m$，因此有 $(2m) \cdot (m) \cdot (3) = 6m^2$ 種不同的套餐。因爲 2003 年是平年，所以總共有 365 天，因此依題意得到 $6m^2 \geq 365 \Rightarrow m^2 \geq 60.83 \Rightarrow m \geq 8$。 $\square$

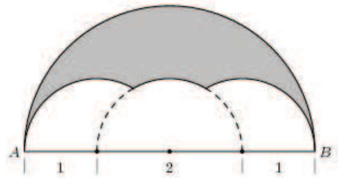
17. 有支冰淇淋是由香草球與圓錐所組成，且球與圓錐的直徑相同。已知當冰淇淋融化時，它恰好填滿錐體。若有 75% 的冰淇淋融化，請問：此時的圓錐高度與半徑的比例爲何？(假設半徑爲 r、高度爲 h，則錐體體積爲 $\frac{1}{3}\pi r^2 h$；而球體體積爲 $\frac{4}{3}\pi r^3$。)

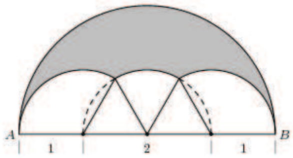
解答: 假設半徑爲 r、高度爲 h，依題意得到 $\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow h = 3r \Rightarrow h : r = 3 : 1$。 $\square$

18. 對所有正偶數 n，請問：式子 $(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)(n+9)$ 的最大正因數爲何？

解答: 因爲是五個連續奇數相乘，因此必有 3, 5，所以最大因數爲 $3 \cdot 5 = 15$。 $\square$

19. 有三個半徑爲 1 的半圓與半徑爲 2 的半圓堆疊成下圖。請問：灰色面積爲何？



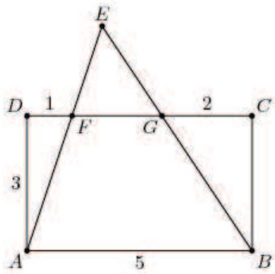


解答:

$$
\begin{aligned}
\text{灰色面積} &= \text{大半圓面積} - \text{白色面積} \\
&= \text{大半圓面積} - (\text{兩個 } 120^\circ \text{ 的扇型面積} + \text{一個 } 60^\circ \text{ 的扇型面積} + \text{兩個正三角形面積}) \\
&= \text{大半圓面積} - 300^\circ \text{ 的扇型面積} - \text{兩個正三角形面積} \\
&= \frac{1}{2}\cdot(2)^2\pi - \frac{5}{6}\cdot(1)^2\pi - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2 \\
&= \frac{7}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

□

20. 矩形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=3$，點 F, G 皆落在 $\overline{CD}$ 上使得 $\overline{DF}=1$, $\overline{GC}=2$，且 $\overline{AF}$ 交 $\overline{BG}$ 於點 E。請問：$\triangle AEB$ 的面積爲何？



解答: 因爲 $\overline{FG}\parallel\overline{AB}$，所以 $\triangle EFG\sim\triangle EAB$。假設三角形 EFG 的高爲 h，得到 $\frac{h}{h+3}=\frac{2}{5}\Rightarrow h=2$，因此 $\triangle AEB$ 的面積爲 $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(2+3)=\frac{25}{2}$。 □

~全卷完~

學校： 姓名: 編號: