

承辦單位：國立中山大學應用數學系

答案：

1. 16 2. 24 英哩/加侖 3. 50° 4. 150° 5. s
6. $\frac{81}{32}\pi$ 7. 5 8. $2(\pi - 2)$ 9. 8 位 10. $\frac{864}{5} = 172.8^\circ$
11. 93 分 12. $4\sqrt{3}$ 13. $1 + \sqrt{2}$ 14. $\frac{1}{2}$ 15. 600
16. $\frac{60}{37}$ 17. $-\frac{1}{16}$ 18. $4 + 2\sqrt{2}$ 19. 4944 20. 4 個

注意事項：

1. 本試卷共 20 題計算題，每一題 5 分。
2. 考試時間：10：00~12：00。
3. 請將詳細步驟書寫於題目下方空白處，答案必須化簡並書寫於上方指定處。
4. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。

1. 定義運算符號 \star ： $a \star b = (a + b)b$ ，請問： $(3 \star 5) - (5 \star 3)$ 的值為何？

解答：

$$(3 + 5) \cdot 5 - (5 + 3) \cdot 3 = 16 \quad \square$$

2. 有位大學生在週末時開著他的車以每加侖汽油行駛 30 英哩的耗油量開回距離 120 英哩的家；在回程時，開著他父母的車以每加侖行駛 20 英哩的耗油量。請問：他此次的旅程中平均每加侖可以行駛幾英哩？

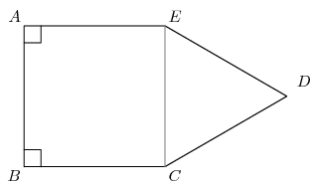
解答：去程耗油 $\frac{120}{30} = 4$ ，回程耗油 $\frac{120}{20} = 6$ ，因此總耗油為 $4 + 6 = 10$ 。平均哩程為 $\frac{240}{10} = 24$ 英哩/加侖。 \square

3. 圓 O 是 $\triangle ABC$ 的外接圓，且 $\angle BOC = 120^\circ$ ， $\angle AOB = 140^\circ$ 。請問： $\angle ABC$ 是幾度？

解答：因為 $\angle AOC = 360^\circ - \angle AOB - \angle BOC = 360^\circ - 140^\circ - 120^\circ = 100^\circ$ ，利用圓周角是圓心角的一半，得到 $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 50^\circ$ 。 \square

4. 等邊凸五邊形 $ABCDE$ 中， $\angle A = \angle B = 90^\circ$ 。請問： $\angle E$ 為何？

解答：依題意畫圖



因為 $\overline{EC} = \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{DE}$ ，所以 $\triangle CDE$ 為正三角形，因此 $\angle E = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ 。 \square

學校：

姓名：

編號：

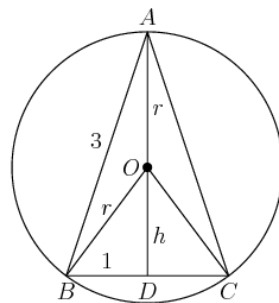
5. 有個加密的代碼設計如下：第一步，從左邊字母來看，出現第一次的字母以下 1 個字母取代；第二步，出現第二次的字母以下 1 + 2 個字母取代；以此類推。(Z 的下一個字母為 A) 例如：“banana” 加密後會得到 “cbodqg”。請問：下列句子中的最後一個 s，經過加密後會變成那個字母？

”Lee’s sis is a Mississippi miss, Chriss!”?

解答：因為最後一個 s 是第 12 個 s，所以會被替換成下 $1 + 2 + \dots + 12 = 78$ 個字母。因為字母以 26 個為一循環，所以 $78 \equiv 0 \pmod{26}$ ，因此最後一個 s 還是 s。 □

6. 有個圓通過一個等腰三角形的三頂點，已知三角形的其中兩邊長為 3，另一邊長為 2，請問：此圓的面積為何？

解答：依題意畫圖



$$\begin{cases} h^2 + 1 = r^2 \\ (h + r)^2 + 1 = 9 \end{cases} \Rightarrow r = \frac{9}{4\sqrt{2}}$$

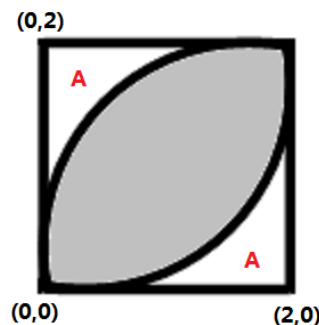
因此圓面積為 $\left(\frac{9}{4\sqrt{2}}\right)^2 \pi = \frac{81}{32}\pi$ 。 □

7. 假設甲的年齡為 T 歲，他的年齡剛好是他的三個孩子年齡和。假設 N 年前，他的年齡是三個孩子年齡和的兩倍，請問： $\frac{T}{N}$ 的值為何？

解答：在 N 年前，甲的年齡為 $T - N$ 歲，依題意得到 $T - N = 2(T - 3N) \Rightarrow T = 5N \Rightarrow \frac{T}{N} = 5$ 。 □

8. 兩個半徑為 2 的圓，其圓心分別為 $(2, 0)$ ， $(0, 2)$ ，請問：兩圓重疊部分的面積為何？

解答：依題意畫圖



所求面積 = 正方形面積 - 2 · A 的面積

$$\begin{aligned}
 &= \text{正方形面積} - 2 \left(\text{正方形面積} - \frac{1}{4} \text{圓面積} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \text{圓面積} - \text{正方形面積} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2^2 \pi - 2^2 \\
 &= 2\pi - 4 \quad \square
 \end{aligned}$$

9. 有群男生及女生爲了要去中國旅行，而洗車籌集旅費。已知一開始這群人中 40% 是女生，後來兩位女生離開且加入兩位男生，此時這群人中 30% 是女生。請問：一開始這群人中女生有幾位？

解答：假設一開始有 p 人，此時女生有 $0.4p$ 人，依題意得到 $\frac{0.4p-2}{p} = 0.3 \Rightarrow p = 20$ ，因此一開始女生有 $20 \cdot 0.4 = 8$ 人。 \square

10. 四邊形 $ABCD$ 中 $\angle A = 2\angle B = 3\angle C = 4\angle D$ ，請問： $\angle A$ 的角度爲何？

解答：依題意得到

$$\begin{aligned}
 360^\circ &= \angle A + \angle B + \angle C + \angle D \\
 &= \angle A + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{3}\angle A + \frac{1}{4}\angle A \\
 &= \frac{12}{12}\angle A + \frac{6}{12}\angle A + \frac{4}{12}\angle A + \frac{3}{12}\angle A \\
 &= \frac{25}{12}\angle A
 \end{aligned}$$

因此 $\angle A = 360^\circ \cdot \frac{12}{25} = 172.8^\circ \approx 173^\circ$ 。 \square

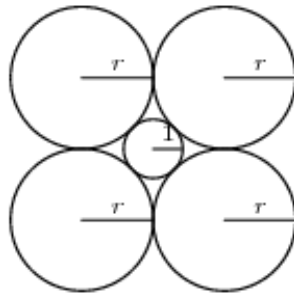
11. 有位老師給全班一份測驗，將全班以人數 1:9 分成 A, B 兩組。已知全班平均分數爲 84 分，且 B 組平均分數爲 83 分及 A 組中每人得分皆相同。請問： A 組中每個人的得分爲何？

解答：不失一般性，假設全班有 10 人，則 A 組有 1 人， B 組有 9 人。全班總分爲 $84 \cdot 10 = 840$ ， B 組總得分爲 $83 \cdot 9 = 747$ ，因此 A 組的總得分爲 $840 - 747 = 93$ ，所以每人得分爲 $\frac{93}{1} = 93$ 。 \square

12. 正三角形 ABC 內部有一點 P ，點 P 分別對 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 作垂足 Q, R, S 。已知 $\overline{PQ} = 1, \overline{PR} = 2, \overline{PS} = 3$ ，請問： \overline{AB} 長度爲何？

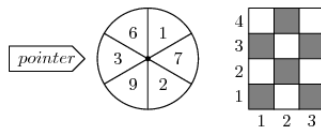
解答：假設正三角形邊長爲 a ，所以面積爲 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{1}{2}(a \cdot 1 + a \cdot 2 + a \cdot 3) \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$ 。 \square

13. 一個半徑為 1 的圓被四個半徑為 r 的圓外切，如圖所示。請問： r 的值為何？



解答: 將兩相鄰大圓的圓心相連，得到一個邊長為 $2r$ 的正方形，而正方形的對角線為 $2\sqrt{2} \cdot r = r + 2 + r \Rightarrow r = \sqrt{2} + 1$ 。

14. 將下圖的輪盤旋轉兩次，將標記的數字記錄起來。第一個數字被 4 除，第二個數字被 5 除，行表示第一個數的餘數，列表示第二個數的餘數，請問：落在灰色區域的機率為何？



解答: 對於第一個數字可以看成 1, 1, 2, 2, 3, 3，對於第二個數字可以看成 1, 1, 2, 2, 3, 4。

落在 (1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3) 的機率為 $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ ；

落在 (2, 2), (2, 4) 的機率為 $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ ；

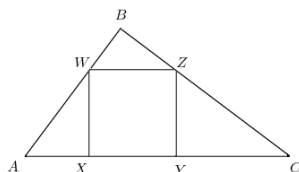
因此落在灰色區域的機率為 $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ 。 □

15. 有 25 塊正方形瓷磚佈滿在 5×5 的正方形中，請問：在 25 塊瓷磚中任選 3 塊，而此 3 塊瓷磚中任兩塊不在同一列或是同一行的選法有幾種？

解答: 第一塊瓷磚有 25 種選法，第二塊瓷磚有 16 種選法，第三塊瓷磚有 9 種選法。但是三塊瓷磚沒有先後順序，因此有 $\frac{25 \cdot 16 \cdot 9}{3!} = 600$ 種選法。 □

16. 直角三角形 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 4$ ， $\overline{AC} = 5$ 。三角形內部有個正方形 $XYZW$ ，其點 X, Y 落在 \overline{AC} 上，點 W, Z 分別落在 \overline{AB} ， \overline{BC} 上。請問：正方形的邊長長度為何？

解答: 依題意畫圖



因為三角形斜邊上的高為 $\frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$ 且 $\triangle WBZ \sim \triangle ABC$ ，所以假設正方形的邊長為 s ，得到 $\frac{12}{5} : 5 = \left(\frac{12}{5} - s\right) : s \Rightarrow s = \frac{60}{37}$ 。 □

17. 有位玩家從數字 1 到 4 中任意選擇一數，選擇完數字後投擲兩個公正的四面骰，其每面標號 1 到 4。若選擇的號碼出現在這兩個四面骰其中一個的底部，即可贏得 1 美元；若選擇的號碼同時出現在這兩個四面骰的底部，即可贏得 2 美元；若選擇的號碼皆沒有出現在這兩個四面骰其中一個的底部，玩家失去 1 美元。請問：投擲一個骰子的期望值為多少美元？

解答：出現一次所選擇的數字有 $\binom{2}{1} \cdot 3 = 6$ 種；出現二次所選擇的數字有 $\binom{2}{2} = 1$ 種；沒有出現所選擇的數字有 $3 \cdot 3 = 9$ 種；總方法數有 $4 \cdot 4 = 16$ 種。因此期望值為 $1 \cdot \frac{6}{16} + 2 \cdot \frac{1}{16} + (-1) \cdot \frac{9}{16} = -\frac{1}{16}$ 。 □

18. 有個底部為正方形的金字塔，從中間與底部平行且距底部 2 單位處切開，上半部為較小的金字塔，其表面積為原金字塔表面積的一半。請問：原金字塔的高度為何？

解答：假設原金字塔的高度為 a ，則小金字塔的高度為 $a - 2$ 。利用相似形得到 $(a - 2) : a = 1 : \sqrt{2} \Rightarrow a = 4 + 2\sqrt{2}$ 。 □

19. 假設 n 是一個最小的正整數，其為 4 與 9 的倍數，在十進位， n 中出現的數字只有 4 及 9 且各數字至少一個。請問： n 的末四個數字為何？

解答：因為 n 是 4 的倍數，所以末兩位數必為 4 的倍數；因為 n 是 9 的倍數，所以各位數之和必為 9 的倍數； n 中只有 4, 9，因此找到 $n = 4444444944$ ，則所求為 4944。 □

20. 已知正整數 a, b 互質且滿足 $\frac{a}{b} + \frac{14b}{9a}$ 是一個整數，請問：有多少個不同的數對 (a, b) ？

解答：假設 $x = \frac{a}{b}$ ，依題意得到 $x + \frac{14}{9x} = k, k \in \mathbb{Z}$ 。因此 $9x^2 - 9kx + 14 = 0 \Rightarrow x = \frac{k}{2} \pm \frac{\sqrt{9k^2 - 56}}{6}$ 。因為 x 為有理數，所以 $9k^2 - 56 = n^2, n$ 為不小於 0 的整數，推得 $56 = 9k^2 - n^2 = (3k - n)(3k + n)$ 。因為 $56 = 1 \cdot 56 = 2 \cdot 28 = 4 \cdot 14 = 7 \cdot 8$ ，所以 $(n, k) = (13, 5), (5, 3)$ ，因此 $x = \frac{1}{3}, \frac{14}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}$ ，則數對 (a, b) 亦有 4 個。 □

~全卷完~