承辦單位：國立中山大學應用數學系

問題	1: 20分	2: 20分	3: 20分	4: 20分	5: 20分	總分: 100分
得分						

注意事項：

1. 本試卷共五大題，每大題20分。
2. 考試時間： 10：00∼12：00。
3. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。
4. 請詳列計算過程、證明，並書寫於題目下方空白處，並將答案書寫於右下方指定處。

---

1. 求$f(x)=x^{81}+x^{49}+x^{25}+x^9+x$除以$x^3-x$的餘式。

解答: **解法一** 因為$x^3-x=x(x-1)(x+1)$，而且$f(0)=0, f(1)=5, f(-1)=-5$，由拉格朗日插值公式知

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-1)(x+1)q(x)+f(0)\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} \\ &\quad +f(1)\cdot\frac{x(x+1)}{1(1+1)}+f(-1)\cdot\frac{x(x-1)}{(-1)(-1-1)} \\ &= x(x-1)(x+1)q(x)+5\cdot\frac{x(x+1)}{2}+(-5)\cdot\frac{x(x-1)}{2} \\ &= x(x-1)(x+1)q(x)+5x \end{aligned}$$

故所求餘式為$5x$。

解法二 $f(x)=x[(x^{50}-1)+(x^{48}-1)+(x^{24}-1)+(x^8-1)]+5x$。而$x^{50}-1, x^{48}-1, x^{24}-1, x^8-1$都能被$x^2-1$整除，故所求餘式為$5x$。 □

2. 求5和49的公倍數，使其恰有十個正因數。

解答: 設$n=2^{\alpha_1}\cdot3^{\alpha_2}\cdot5^{\alpha_3}\cdot7^{\alpha_4}\cdot\cdots\cdot p_s^{\alpha_s}$，顯然$\alpha_3\geq1,\ \alpha_4\geq2$，故$10=d(n)=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\alpha_4)\cdots(1+\alpha_s)$。由於$(\alpha_3+1)|10$及$\alpha_3+1\geq2$，只有$\alpha_3=1,4,9$。又$(\alpha_4+1)|10,\ \alpha_4+1\geq3$，只有$\alpha_4=4,9$。只能$\alpha_3=1,\ \alpha_4=4$。其他的$\alpha_1=0$。則$n=5\cdot7^4=12005$。 □

3. 設$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 0, F_0 = 0, F_1 = 1$，證明

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}, \qquad m, n \geq 1$$

解答: 利用數學歸納法證明，當$m = 1$時，這個公式爲$F_{n+1} = F_{n-1}F_1 + F_nF_2$，顯然成立。當$m = 2$時，這個公式爲

$$F_{n+2} = F_{n-1}F_2 + F_nF_3 = F_{n-1} + 2F_n = F_{n-1} + F_n + F_n = F_{n+1} + F_n.$$

也成立。假設當$m = k$和$m = k + 1$時，此公式皆成立，即

$$\begin{aligned} F_{n+k} &= F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1} \\ F_{n+k+1} &= F_{n-1}F_{k+1} + F_nF_{k+2} \end{aligned}$$

將上二式相加得

$$F_{n+k+2} = F_{n-1}F_{k+2} + F_nF_{k+3}$$

此公式得證。 □

4. 試證：$\frac{1\times3\times5\times\cdots\times99}{2\times4\times6\times\cdots\times100} > \frac{1}{10\sqrt{2}}$。

解答: 設$S = \frac{1\times3\times5\times\cdots\times99}{2\times4\times6\times\cdots\times100}$，利用$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}, \frac{3}{4} > \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1} > \frac{n-1}{n}$得

$$S > \frac{1 \times 2 \times 4 \times \cdots \times 98}{2 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 99} \tag{1}$$

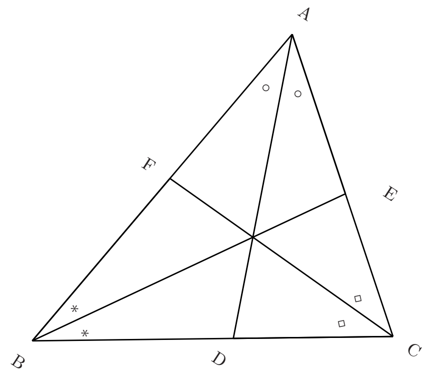
因此(1)式兩邊同乘S得

$$\begin{aligned} S^2 &> S \times \left(\frac{1 \times 2 \times 4 \times \cdots \times 98}{2 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 99}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}\right) \times \cdots \times \left(\frac{98}{99} \times \frac{99}{100}\right) \\ &= \frac{1}{200} \end{aligned}$$

故$S > 1/(10\sqrt{2})$。 □

5. 設$\triangle ABC$的$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的平分線分別交它的對邊$BC(= a)$、$CA(= b)$、$AB(= c)$於D、E、F，試證六條線段BD、DC, CE、EA, AF、FB中每隔一個取三條線段的積爲

$$\frac{a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$



解答: 根據題意，可知AD、BE、CF是$\triangle ABC$的三個內角的平分線，則$c:a=AE:EC,\ c:(c+a)=AE:(AE+EC),\ c:(c+a)=AE:b$
$\therefore AE=\frac{bc}{c+a},\ FB=\frac{ca}{a+b},\ DC=\frac{ba}{c+b}$
所以

$$EA\cdot FB\cdot DC=\frac{a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$