承辦單位：國立中山大學應用數學系

答案：

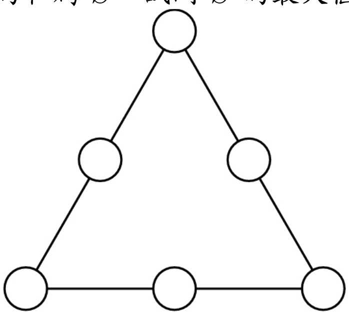
1. 39	2. 50	3. 星期三	4. 1	5. $\frac{4}{9}$
6. $\frac{17}{6}$	7. 17	8. $\pi+2$	9. 56	10. $\frac{123}{40}$
11. $\frac{1}{2}$	12. $\frac{5}{3}$	13. 3722	14. $\frac{4}{11}$	15. 1
16. $\frac{3}{2}$	17. 5	18. 16	19. $\frac{3}{2}$	20. 1

注意事項：

1. 本試卷共 20 題計算題，每一題 5 分。
2. 考試時間：10：00∼12：00。
3. 請將詳細步驟書寫於題目下方空白處，答案必須化簡並書寫於上方指定處。
4. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。

---

1. 如圖，一個三角形上的圓圈內都放入 10 到 15 間的六個整數。且每一邊三個圓圈的和都相等，假設每一邊三個圓圈的和為 S，試問 S 的最大值可能為多少？



解答： 假設在上面圓圈中的數字是 a，往下順時針假設 $b,\ c,\ d,\ e,\ f$，故有

$$S=a+b+c$$

$$S=c+d+e$$

$$S=e+f+a$$

相加起來得到

$$\begin{aligned}3S&=(a+b+c+d+e+f)+(a+c+e)\\&=75+(a+c+e)\end{aligned}$$

且可以知道 $a+b+c+d+f$ 為 $10+11+12+13+14+15=75$。得到 $S=\frac{75}{3}+\frac{a+c+e}{3}$，其中 $a+c+e$ 取最大 $15+14+13=42$，故得到 $S=39$，所以 $a=15,\ b=10,\ c=14,\ d=12,\ e=13,\ f=11$。 □

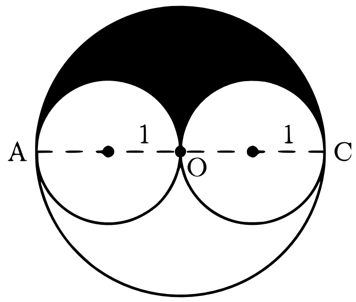
2. 國王中學有 1200 位學生。每個學生一天上 5 堂課。每位教師一天教 4 堂課。每班都有 30 位學生和 1 位老師。試問國王中學有幾位教師？

解答： 如果每個學生都要上 5 堂課課，而且共有 1200 學生，那麼他們共要上 $5\times 1200 = 6000$ 堂課。且知道每個班都有 30 學生，所以每一班需要上要 $\frac{6000}{30} = 200$ 堂課。每班都有 1 個老師，所以老師們總共要上 200 堂課。每位教師都會教 4 堂課，所以如果有 T 個老師，他們會有 $4T$ 堂課。故 $4T = 200 \Rightarrow T = 50$。 □

3. 在某一年中，一月份有四個星期二和星期六，試問當年一月一號爲禮拜幾？

解答： 一月中有完整四個星期再多三天，且每一個星期中都必定含有禮拜四以及禮拜六。且剩餘三天爲連續，所以剩餘的三天必定是禮拜三、禮拜四、禮拜五。由此可以知道禮拜三需要再 29 號，所以可以知道 22, 15, 8, 1 都是禮拜三，故答案爲星期三。 □

4. 大圓圈有直徑 $\overline{AC}$。這兩個小圓圈的圓心在 $\overline{AC}$ 上，且大圓的圓心 O 位於兩小圓的切點上。如果每個小圓半徑都爲 1，試問陰影區域的面積與其中一個小圓的面積的比值是多少？



解答： 小圓半徑爲 1，故面積爲 π。大圓半徑爲 2，故面積爲 4π。過 $\overline{AC}$ 的兩個半圓面積爲 π。則陰影部分面積爲 $2\pi - \pi = \pi$，故可以得知比例爲 $\frac{\pi}{\pi}$=1。 □

5. 畫有編號 1 到 10 的球放進同一個罐子中。傑克從罐子中隨機取出一個球，且不放回。然後吉爾再隨機取出一球。試問取出兩球的號碼相加爲偶數的機率爲多少？

解答： 兩數相加爲偶數的組合必定是，奇數加奇數或偶數加偶數。故兩次取出都是奇數的機率爲 $\frac{5}{10}\times\frac{4}{9} = \frac{2}{9}$。且兩次取出都是偶數的機率爲 $\frac{5}{10}\times\frac{4}{9} = \frac{2}{9}$。故答案爲 $\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$。 □

6. 在 $\triangle ABC$ 中 $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 8$, $\overline{BC} = 10$，且 D 爲 $\overline{BC}$ 之中點。試問 $\triangle ADB$ 和 $\triangle ADC$ 的圓內切半徑和？

解答： 我們注意到畢氏定理的逆應用 $\triangle ABC$ 是一個直角三角形，且直角爲 A。因此 $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} = 5$，面積 $ADB = ADC = 12$。因爲 $A = rs$，故 $\triangle ADB = \frac{12}{(5+5+6)/2} = \frac{3}{2}$。所以 $\triangle ADC$ 的圓內切半徑爲 $\frac{12}{(5+5+8)/2} = \frac{4}{3}$。把兩者加在一起得到 $\frac{17}{6}$。 □

7. 在四位正整數 $abcd$ 中，其中 $a \neq 0$，具有 3 個二位整數 $ab < bc < cd$ 的性質而形成一遞增等差數列，請問這種四位數有幾個？(如 4692 即 $a = 4, b = 6, c = 9, d = 2$ 具有此性質。)

解答： 依題意可得到三數爲 $10a+b, 10b+c,$ 與 $10c+d$，且滿足 $a \leq b \leq c$。爲了滿足爲等差數列，所以 $(10c+d)-(10b+c) = (10b+c)-(10a+b)$，即 $10(c-2b+a) = 2c-b-d$。但是 $0 < a \leq b \leq c < 10$，所以可以分爲兩類 $a+c-2b = 1,\ a+c-2b = 0$。

Case 1：$a + c - 2b = 1$

當 $c = 9$，可得到 $b + d = 8,\ 2b - a = 8$，即我們可以知道 $b = \frac{8+a}{2}$，所以 $5 \leq b \leq 8$。這樣可以得到 2593, 4692, 6791, 8890。當 $c = 8$，可得到 $b + d = 6,\ 2b - a = 7$，即我們可以知道 $b = \frac{7+a}{2}$，所以 $4 \leq b \leq 6$。這樣可以得到 1482, 3581, 5680。當 $c = 7$，可得到 $b + d = 4,\ 2b - a = 6$，即我們可以知道 $b = \frac{6+a}{2}$，所以 $b = 4$。這樣可以得到 2470。當 $c = 6$，找不到解。

Case 2：$a + c - 2b = 0$

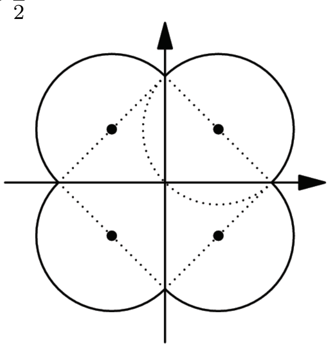
這表示 $a,\ b,\ c$ 成等差數列，所以可以得到 1234, 1357, 2345, 2468, 3456, 3579, 4567, 5678, 6789。而我們全部的答案爲 17 個。 □

8. 方程式 $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ 之圖形所圍成區域之面積爲何？

解答： 考慮 $x > 0, y > 0$

$$x^2 + y^2 = x + y$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

圓與座標軸交於 $(0,1)$ 和 $(1,0)$，且圓的半徑爲 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，而此面積可分成半圓與三角形，其面積爲 $A = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$



再由對稱性，我們可得到面積爲 $\pi + 2$。 □

9. 甲有 64 枚公正的硬幣，他投擲所有硬幣，任何一個出現反面的硬幣就重擲，第二次還是出現反面的硬幣就擲第三次。求出現正面總數量的期望值？

解答： 預計第一次翻到正面的數量是 32，第二次是 16，第三次是 8。全部加總得到 56。 □

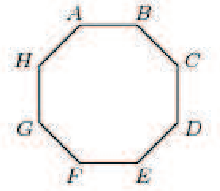
10. 已知等差數列前四項爲 $x + y,\ x - y,\ xy,\ \frac{x}{y}$，請問：第五項爲何？

解答： 因爲公差爲 $(x - y) - (x + y) = -2y$，所以

$$\begin{cases} xy = (x-y) + (-2y) = x - 3y \\ \frac{x}{y} = (x-y) + 2(-2y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3y}{1-y} \\ x = \frac{-5y^2}{1-y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - y = 0 \Rightarrow y = 1 \\ -5y^2 = 3y \Rightarrow y = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

當 $y=1$ 時，第三項爲 $xy=x$ 及第四項爲 $\frac{x}{y}=x$ 相同，但第一項爲 $x+1$，第二項爲 $x-1$，所以不合；當 $y=-\frac{3}{5}\Rightarrow x=-\frac{9}{8}$，此時第五項爲 $(x-y)+3(-2y)=x-7y=-\frac{9}{8}-7\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{123}{40}$。 □

11. 正八邊形 $ABCDEFGH$ 的面積爲 1，請問：矩形 $ABEF$ 的面積爲何？



解答： 假設 $\overline{AB}=x$，則 $\overline{PH}=\frac{x}{\sqrt{2}}$。

$ABCDEFGH$ 面積 = 正方形 $PQRS$ 面積 + 4 (三角形 APH 面積 + 矩形 $ABQP$ 面積)

$$1=x^2+4\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+x\cdot\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$
$$1=2\left(1+\sqrt{2}\right)x^2$$
$$x^2=\frac{1}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}$$

所求面積爲 $x^2+2\cdot\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot x=\left(1+\sqrt{2}\right)x^2=\frac{1}{2}$。 □

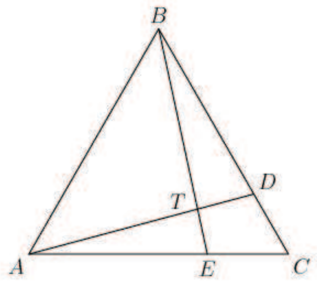
12. 在三角形 ABC 中，$\overline{AB}=7,\ \overline{AC}=8,\ \overline{BC}=9$，且點 D 在三角形 ABC 外接圓上使得 $\overline{AD}$ 爲 $\angle BAC$ 的角平分線。請問：$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}$ 的值爲何？

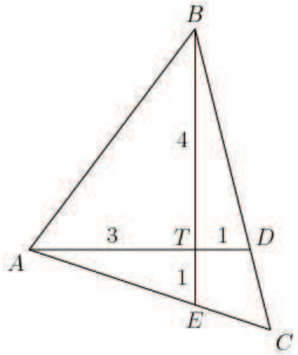
解答： 因爲 $\angle BAD=\angle CAD$，所以 $\overline{BD}=\overline{CD}$，利用托勒密定理得到 $7\overline{CD}+8\overline{BD}=9\overline{AD}\Rightarrow 15\overline{CD}=9\overline{AD}\Rightarrow\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$。 □

13. 兩等差數列分別爲 1, 4, 7, ... 及 9, 16, 23, ...。假設集合 S 是聯集兩數列前 2004 項，請問：S 中有幾個元素？

解答： 數列 A： 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, ...；數列 B： 9, 16, 23, 30, ...
可以知道兩數列第一個相同的數爲 16，且公差爲 $[3,7]=21$，因此共同的數所成的數列 C： 16, 37, 58, ...。已知 $A_{2004}=3\cdot 2004-2=6010,\ B_{2004}=7\cdot 2004+2=14030$，假設數列 C 的最後一項爲 $21k-5$，推得 $21k-5\le 6010\Rightarrow k=286$，因此數列 C 中有 286 個數。所求爲 $2004+2004-286=3722$。 □

14. 在三角形 ABC 中，點 $D,\ E$ 分別落在 $\overline{BC},\ \overline{AC}$ 上。假設 $\overline{AD}$ 交 $\overline{BE}$ 於 T 點，使得 $\frac{\overline{AT}}{\overline{DT}}=3,\ \frac{\overline{BT}}{\overline{ET}}=4$。請問：$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$ 的值爲何？





解答： 假設 $T(0,0),\ A(-3,0),\ B(0,4),\ D(1,0),\ E(0,-1)$，則 $\overleftrightarrow{BD}: y=-4x+4,\ \overleftrightarrow{AE}: x+3y=-3$，因此交於點 $C\left(\frac{15}{11},-\frac{16}{11}\right)$，所求爲 $\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\frac{\frac{15}{11}-1}{1-0}=\frac{4}{11}$。 □

15. 實數 $a,\ b,\ c$ 滿足 $a-7b+8c=4$ 及 $8a+4b-c=7$，請問：$a^2-b^2+c^2$ 的值爲何？

解答：

$$\begin{cases} a+8c=7b+4 \\ 8a-c=7-4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+16ac+64c^2=49b^2+56b+16 \\ 64a^2-16ac+c^2=16b^2-56b+49 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 65a^2+65c^2=65b^2+65$$
$$\Rightarrow a^2-b^2+c^2=1$$ □

16. 對於所有的 y，求 x 滿足 $8xy-12y+2x-3=0$？

解答： 因爲 $8xy-12y+2x-3=4y(2x-3)+(2x-3)=(4y+1)(2x-3)=0$，且所有的 y 皆要成立，所以 $2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$。 □

17. 梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ 且點 $E,\ F$ 是 $\overline{BC},\ \overline{DA}$ 的中點。已知四邊形 $ABEF$ 面積是四邊形 $EFCD$ 面積的兩倍，請問：$\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}}$ 的值爲何？

解答： 依題意得到 $\frac{\overline{AB}+\overline{EF}}{\overline{EF}+\overline{CD}}=2,\ \overline{EF}=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2} \Rightarrow \frac{3\overline{AB}+\overline{CD}}{\overline{AB}+3\overline{CD}}=2 \Rightarrow \overline{AB}=5\overline{CD} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=5$。 □

18. 請問：有多少個正整數 $n \le 24$ 使得 $n!$ 是 $1+2+\cdots+n$ 的整數倍數？

解答： 因爲 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，所以 $\frac{n!}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2(n-1)!}{n+1}$ 是整數，因此找到不合的有 $2,\ 4,\ 6,\ 10,\ 12,\ 16,\ 18,\ 22$，共有 8 個數不合，因此滿足的有 $24-8=16$ 個。□

19. 假設 $4^a = 5,\ 5^b = 6,\ 6^c = 7,\ 7^d = 8$，請問：$a \cdot b \cdot c \cdot d$ 的值爲何？

解答：

$$\begin{aligned} 8 &= 7^d \\ &= (6^c)^d \\ &= \left(\left((4^a)^b\right)^c\right)^d \\ &= 4^{2abcd} \end{aligned}$$

$2^3 = 2^{2abcd} \Rightarrow 3 = 2abcd \Rightarrow abcd = \frac{3}{2}.$ □

20. 在某次的期中考，有 10% 的學生拿到 70 分；有 25% 的學生拿到 80 分；有 20% 的學生拿到 85 分；有 15% 的學生拿到 90 分；其餘學生皆拿到 95 分。請問：分數的平均與中位數之差爲何？

解答： 不失一般性，假設學生有 20 人，因此 70 分的有 2 人；80 分的有 5 人；85 分的有 4 人；90 分的有 3 人；95 分的有 6 人。平均爲 $\frac{70(2)+80(5)+85(4)+90(3)+95(6)}{20} = \frac{1720}{20} = 86$，而中位數爲 85，因此所求爲 $|86-85| = 1$。□

~全卷完~