承辦單位：國立中山大學應用數學系

答案：

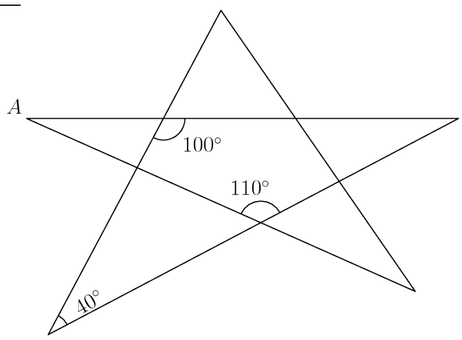
1.	30	2.	$\sqrt{13}$	3.	$6(1-1/4^{100})$	4.	$\frac{4}{9}$	5.	24
6.	52	7.	$\frac{7}{16}$	8.	$\frac{1}{8}$	9.	120	10.	252
11.	3/4	12.	1/3	13.	$\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$	14.	7 : 16	15.	$\sqrt{65}/2$
16.	1/8	17.	8	18.	1	19.	5	20.	62

注意事項：

1. 本試卷共 20 題計算題，每一題 5 分。
2. 考試時間：10：00∼12：00。
3. 請將詳細步驟書寫於題目下方空白處，答案必須化簡並書寫於上方指定處。
4. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。

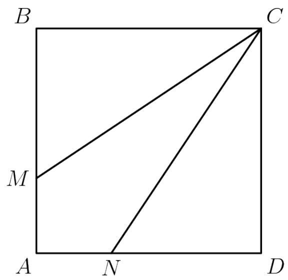
---

1. 試求下圖 $\angle A =$ ___①___ 度。



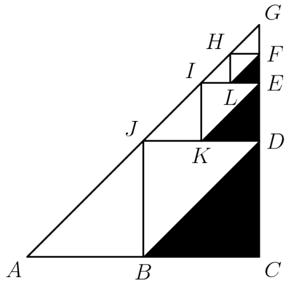
解答： 星星形狀的最右邊角度為 $180-100-40=40$ 度。故可得之 $\angle A = 180-40-110 = 30$ 度。 □

2. 正方形 $ABCD$ 的邊長為 3，$\overline{CM}$ 與 $\overline{CN}$ 將此正方形面積分成 3 等分，試求 $\overline{CM} =$ ___②___。



解答： 已知道正方形邊長為 3，故面積為 $3^2=9$，再將面積三等分後得到每一塊面積為 $\frac{9}{3}=3$。在 $\triangle CBM$ 中，以 $\overline{BC}=3$ 為底且 $\overline{BM}$ 為高的三角形，故面積為 $\overline{BC}\times\overline{BM}\times\frac{1}{2}=3 \Rightarrow 3\times\overline{BM}\times\frac{1}{2}=3 \Rightarrow 3\overline{BM}=6,\ \overline{BM}=2$。所以由畢氏定理可以得到 $\overline{CM}=\sqrt{\overline{BM}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$。 □

3. 點 $B,\ D,\ J$ 爲直角 $\triangle ACG$ 各邊中點，點 $K,\ E,\ I$ 爲 $\triangle JDG$ 各邊中點，其餘以此類推。若此分割及著黑的步驟進行 100 次(前 3 次如圖所示)，且 $\overline{AC}=\overline{CG}=6$。試求黑色部分面積 = ___③___ 。

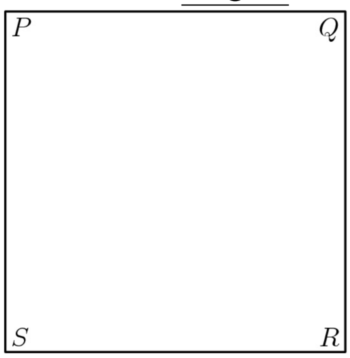


解答：【**解法一**】
$\overline{CD}=\frac{\overline{CG}}{2}=3,\ \overline{DE}=\frac{\overline{CD}}{2}=\frac{3}{2},\ \overline{EF}=\frac{\overline{DE}}{2}=\frac{3}{4}$
$\overline{CB}=\overline{CD}=3,\ \overline{DK}=\overline{DE}=\frac{3}{2},\ \overline{EL}=\overline{EF}=\frac{3}{4}$
$[CBD]=\frac{1}{2}3^2=\frac{9}{2},\ [DKE]=\frac{1}{2}(\frac{3}{2})^2=\frac{9}{8},\ [ELF]=\frac{1}{2}(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{32}$，所以區域面積總和爲 $\frac{(9/2)(1-(1/4)^{100}}{1-1/4}=6(1-1/4^{100})$。 □

4. 小泰從 8, 9, 10 三個數字中，選出相異的兩個數字，並計算它的總和。小卡從 3, 5, 6 三個數字中，選出相異的兩個數字，並計算它的乘積。試求小泰的總和比小卡的乘積大機率 = ___④___ 。

解答：小泰可能獲得的數值有：$8+9=17,\ 8+10=18,\ 9+10=19$。小卡可能獲得的數值有：$3\times5=15,\ 3\times6=18,\ 5\times6=30$。如果小泰的總和爲 17，因爲 17 只有大於 15，則他的總和將大於小卡的機率是 $\frac{1}{3}$，。如果小泰的總和爲 18，因爲 18 只有大於 15，則他的總和將大於小卡的機率是 $\frac{1}{3}$。如果小泰的總和爲 19，因爲 19 比 15, 18 都大，則他的總和將大於小卡的機率是 $\frac{2}{3}$。且每個總和有 $\frac{1}{3}$ 的可能被選中，所以我們有 $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)=\boxed{\frac{4}{9}}$。

5. 假設 $PQRS$ 是一張正方形的紙，將 P 折疊至 R，然後將 Q 折疊至 S，所得面積爲 9 平方英吋，試求正方形 $PQRS$ 的周長 = ___⑤___ 英吋。

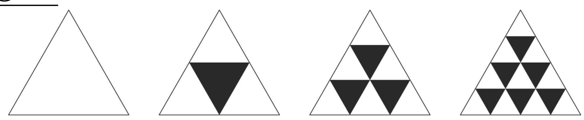


解答：在兩次折疊完成之後，正方形面積變爲三角形面積 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$。由於三角形面積是正方形的 $\frac{1}{4}$ 倍，故 $\frac{1}{4}\Rightarrow 9\times4=36$。面積爲 36 平方英吋的正方形，邊長度爲 $\sqrt{36}=6$ 英吋。故每邊都是 6 英吋，所以總的周長是 $6\times4=\boxed{24}$ 英吋。 □

6. 一個 $4 \times 4 \times 4$ 的正立方體正好裝滿 64 個小立方體。試求有 ___⑥___ 個小立方體會接觸到側面或底面。

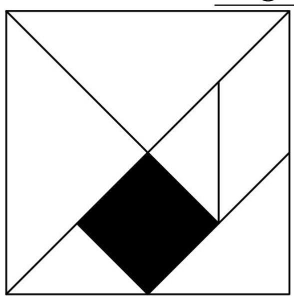
解答： 我們知道總共有五面，其中一面的小立方體有 $4 \times 4 = 16$ 個，故共有 $16 \times 5 = 80$ 個小立方體在底面和側面。再減去重疊的區域部分，代表每一邊減去 4 個，以及底部重複的 12 個。故答案爲 $80 - (4 \times 4 + 12) = 80 - 28 = \boxed{52}$。 □

7. 如圖，若三角形的模式依照此規則變化下去，試問第八個三角形，其陰影的面積佔整個三角形的比值 $=$ ___⑦___。



解答： 計算每個圖的黑色三角形數量有 $0,\ 1,\ 3,\ 6,\ \ldots$ 故可以知道每一次增加的數量爲 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$，所以我們可以列出到第八的圖形有幾個黑色三角形 $0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28$。所以知道有 28 個黑色三角形，再把全部分割的三角形數量列出來得到 $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots$。觀察得到個數關係就是平方數，故第八個圖片的個數有 $8^2 = 64$ 個。故黑色三角形所佔的面積比例爲 $\frac{28}{64} = \boxed{\frac{7}{16}}$。 □

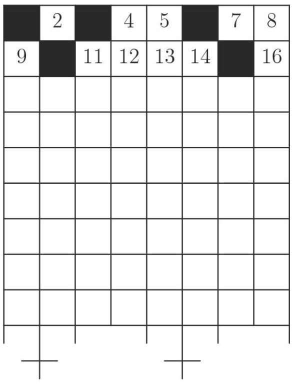
8. 試求黑色面積佔了整個大正方形面積的比值 $=$ ___⑧___。(此圖按一定比例繪製)



解答： 正方形的對角線將正方形分成四等分，且四等分中的小三角形可以再切成四等分，黑的的部分佔了小三角形的四分之二。故黑色面積佔了大正方形的 $1 \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{8}}$。

□

9. 如圖，一個有八行的長方形棋盤，其第一列從左上角由左至右每個方格依序標上 1 至 8 號，而第二列亦由左至右標上 9 至 16 號，其餘依此類推。如今有一個學生將方格 1 圖黑，再跳 1 格將方格 3 塗黑，再跳 2 個將方格 6 塗黑，再跳 3 格將方格 10 塗黑。接著依此方法直到每一行都至少有一個方格被塗黑。試求至少需要塗到第 ___⑨___ 個方格才會達到此步驟？



解答： 將黑色部分寫成數列得到 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120，因爲有八行，而我們需要找到集滿所有除以 8 之後的餘數的那最後一格，因此我們對照上述數列列出它們除以 8 之後的餘數，分別爲 3, 6, 2, 7, 5, 4, 4, 5, 7, 2, 6, 3, 1, 0，發現當空格塡到 $\boxed{120}$ 時，所有行都至少有一個方格被塗黑。 □

10. 三個好朋友各自有一些錢，某天他們要依照以下規則去分配他們的金錢：首先小安給小明還有小華一些錢，使小明小華的錢都變爲原本的兩倍。後來小明再拿出一點錢給小安還有小華，使他們的金錢都加倍。最後小華拿出一些錢給小明還有小安，使他們的金錢也都加倍。假如小華最初有 36 元、最終有 36 元，則三位好友的全部金額 = ___10___ 元。

解答： 如果小華一開始有 36 元，則小安分給小華錢之後小華會有 $36 \times 2 = 72$ 元。後來小明再給小華一些錢，使小華的錢變爲兩倍，故有 $72 \times 2 = 144$ 元。且已經知道小華最後剩下 36 元，故他分給小安以及小明 $144 - 36 = 108$ 元。且知道小安和小明在這一個步驟之前他們共有 108 元。且在這之前小華有 144 元，所以他們三個共有 $144 + 108 = \boxed{252}$ 元。 □

11. 投擲兩個公正的八面骰，其每面都有數字 1 到 8，請問：朝上的點數積大於點數和的機率 = ___11___ ?

解答： 討論點數積不大於點數和的情形

第一種：其中有一顆骰子點數爲 1，有 $\binom{2}{1}\binom{8}{1} - 1 = 15$ 種。

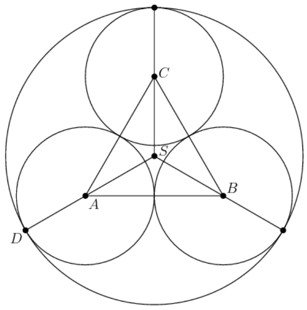
第二種：其中有一顆骰子點數爲 2，只有 $(2, 2)$ 不滿足題意，有 1 種。

因此所求機率爲 $\frac{8^2-15-1}{8^2} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$。 □

12. 有一袋中最初只有紅色彈珠及藍色彈珠，且藍色彈珠多於紅色彈珠。一直放入紅色彈珠直到袋中有 $\frac{1}{3}$ 是藍色彈珠；接著放入黃色彈珠直到袋中有 $\frac{1}{5}$ 是藍色彈珠；最後放入藍色彈珠使得藍色彈珠的數量變成原先藍色彈珠的兩倍。請問：現在藍色彈珠占全部彈珠的比例 = ___12___ ?

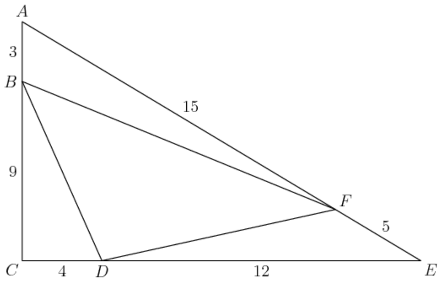
解答： 假設還沒放入藍色彈珠時，藍色彈珠數量爲 x，其他顏色的彈珠數量爲 $4x$，所求爲 $\dfrac{x+x}{(x+4x)+x} = \dfrac{1}{3}$。 □

13. 三個半徑爲 1 的圓兩兩外切且皆與一個大圓內切，請問：大圓半徑 = ___13___ ?

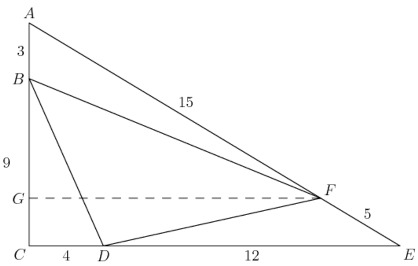


解答： 中間是邊長爲 2 的正三角形，所以 $\overline{SA} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$，因此大圓半徑爲 $1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$。
□

14. 在直角三角形 ACE 中，$\overline{AC} = 12,\ \overline{CE} = 16,\ \overline{EA} = 20$，且點 $B,\ D,\ F$ 分別落在 $\overline{AC},\ \overline{CE},\ \overline{EA}$ 上，使得 $\overline{AB} = 3,\ \overline{CD} = 4,\ \overline{EF} = 5$。請問：$\triangle DBF$ 面積與 $\triangle ACE$ 面積比值 = ___14___？



解答： 作一條直線過 F 點且平行 $\overline{CE}$ 交 $\overline{AC}$ 於 G 點



因爲 $\triangle AFG \sim \triangle AEC,\ \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} = \frac{3}{4}$，得到 $\overline{GF} = 12,\ \overline{AG} = 9$。因此

$$\begin{aligned}\triangle BDF \text{ 面積} &= \triangle ACE \text{ 面積} - \triangle ABF \text{ 面積} - \triangle BCD \text{ 面積} - \triangle DEF \text{ 面積}\\ &= \frac{1}{2}\cdot 16\cdot 12 - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 12 - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 9 - \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 3\\ &= 96 - 18 - 18 - 18\\ &= 42\end{aligned}$$

因此所求爲 $\frac{42}{96} = \frac{7}{16}$。 □

15. 有個三角形的三邊分別爲 5, 12, 13，且有外接圓與內切圓。請問：兩圓的圓心相距 = ___15___？

解答： 假設三角形的三個點爲 $(0,0),\ (5,0),\ (0,12)$，因爲此三角形爲直角三角形，所以外接圓圓心在斜邊的中點 $\left(\frac{5}{2}, 6\right)$。假設內切圓的半徑爲 r，利用三角形面積

$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12 = \frac{1}{2}(5r+12r+13r) \Rightarrow r = 2$，因此內切圓圓心爲 $(2,2)$。所求爲 $\sqrt{\left(\frac{5}{2}-2\right)^2+(6-2)^2} = \frac{\sqrt{65}}{2}$。 □

16. 方程式 $x^2+mx+n=0$ 的兩根爲方程式 $x^2+px+m=0$ 根的一半，其中 $m,\ n,\ p$ 皆不爲零。請問：$\frac{n}{p} =$ ___16___？

解答： 假設 $x^2+px+m=0$ 的兩根爲 $a,\ b$，利用根與係數得到 $a+b=-p,\ ab=m$；再推得 $x^2+mx+n=0$ 的兩根爲 $a/2,\ b/2$，利用根與係數得到 $(a+b)/2 = -m,\ ab/4=n$。因此 $m=p/2,\ n=m/4 \Rightarrow n=p/8 \Rightarrow \frac{n}{p}=1/8$。 □

17. 甲的手機號碼爲 $555-abc-defg$，其中 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g$ 皆爲一位數且爲遞增且不爲 0, 1。請問：甲的手機有 = ___17___ 種不同的號碼？

解答： 因爲遞增且一位數，所以必從 2 到 9 中選出七個數字並由小到大排列爲號碼，因此有 $\binom{8}{7}=8$ 種不同的號碼。 □

18. 在某次的期中考，有 10% 的學生拿到 70 分；有 25% 的學生拿到 80 分；有 20% 的學生拿到 85 分；有 15% 的學生拿到 90 分；其餘學生皆拿到 95 分。請問：分數的平均與中位數之差 = ___18___？

解答： 不失一般性，假設學生有 20 人，因此 70 分的有 2 人；80 分的有 5 人；85 分的有 4 人；90 分的有 3 人；95 分的有 6 人。平均爲 $\frac{70(2)+80(5)+85(4)+90(3)+95(6)}{20} = \frac{1720}{20} = 86$，而中位數爲 85，因此所求爲 $|86-85|=1$。 □

19. 梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ 且點 $E,\ F$ 是 $\overline{BC},\ \overline{DA}$ 的中點。已知四邊形 $ABEF$ 面積是四邊形 $EFCD$ 面積的兩倍，請問：$\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} =$ ___19___？

解答： 依題意得到 $\frac{\overline{AB}+\overline{EF}}{\overline{EF}+\overline{CD}} = 2,\ \overline{EF} = \frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2} \Rightarrow \frac{3\overline{AB}+\overline{CD}}{\overline{AB}+3\overline{CD}} = 2 \Rightarrow \overline{AB} = 5\overline{CD} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 5$。 □

20. 有個集合爲 $\{1,\ 2,\ \ldots,\ 100\}$，其中有個子集 B，B 中沒有兩個元素之和爲 125，請問：B 的元素個數最多 = ___20___ 個？

解答： 首先 $1,\ 2,\ \ldots,\ 24$ 可以在 B 中，因爲 $125 = 25+100,\ 26+99,\ \ldots,\ 62+63$，有 38 個組合，因此$B$ 的元素個數最多爲 $24+38=62$。 □

～全卷完～