承辦單位：國立中山大學應用數學系
答案：

1. $\underline{a=1, b=-2}$ 2. $\underline{2}$ 3. $\underline{64}$ 4. $\underline{184}$ 5. $\underline{2}$

6. $\underline{\frac{1}{2}}$ 7. $\underline{17}$ 8. $\underline{5}$ 9. $\underline{28}$ 10. $\underline{2}$

注意事項：

1. 本試卷共 10 題計算題，每一題 10 分。
2. 考試時間： 10：00∼12：00。
3. 請將詳細步驟書寫於題目下方空白處，答案必須化簡並書寫於上方指定處。
4. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。

---

1. 若 a, b 是整數，且 x^2-x-1 爲 ax^3+bx^2+1 的一個因式，試求 a, b 之值。$a=1, b=-2$

解答: 【解法一】 由長除法可知，ax^3+bx^2+1 除以 x^2-x-1 的商式爲 $ax+(a+b)$，餘式爲 $(2a+b)x+(a+b+1)$，但因爲 x^2-x-1 是 ax^3+bx^2+1 的因式，所以餘式爲 0，換言之，

$$\begin{aligned} 2a+b&=0\\ a+b&=-1 \end{aligned}$$

故 $a=1,\ b=-2$。

【解法二】 因爲 x^2-x-1 是 ax^3+bx^2+1 的因式，由此可判斷出商式爲一次式且 x 的係數爲 a，則令商式爲 $ax+k$，再因 ax^3+bx^2+1 的常數爲 1，可知除式的常數 -1 與商式的常數 k 相乘必須爲 1，因此 $k=-1$，商式爲 $ax-1$。
寫成因式分解的形式，再比較係數，

$$\begin{aligned} ax^3+bx^2+1&=(ax-1)(x^2-x-1)\\ &=ax^3+(-a-1)x^2+(1-a)x+1 \end{aligned}$$

可得

$$b=-a-1, \quad 0=1-a$$

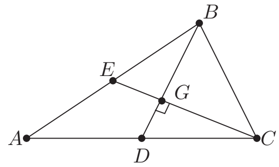
故 $a=1$ 和 $b=-2$。 □

2. 若 $60^a=3, 60^b=5$，試求 $12^{[(1-a-b)/2(1-b)]}$ 之值。 2

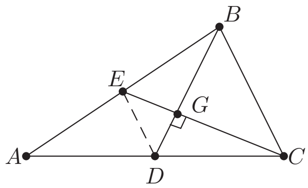
解答: $12=60/5=60/60^b=60^{1-b}$，所以

$$\begin{aligned} 12^{[(1-a-b)/2(1-b)]}&=[60^{1-b}]^{(1-a-b)/2(1-b)}\\ &=60^{(1-a-b)/2}=\sqrt{\frac{60}{60^a60^b}}\\ &=\sqrt{\frac{60}{3\cdot 5}}=2 \end{aligned}$$
□

3. 如下圖，$\overline{BD}$ 與 $\overline{CE}$ 爲 $\triangle ABC$ 之中線，且 $\overline{BD} \perp \overline{CE}$, $\overline{BD} = 8$, $\overline{CE} = 12$，求 $\triangle ABC$ 的面積。 64



解答: 連接 $\overline{ED}$



因爲 $\overline{BD} \perp \overline{CE}$，所以

$$\text{四邊形 } BCDE \text{ 面積} = \frac{1}{2}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{CE} = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12 = 48$$

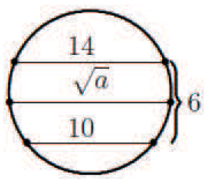
又因爲 $\overline{BD}$, $\overline{CE}$ 分別爲 $\triangle ABC$ 的兩中線，則交點 G 即爲重心，因此

$$\triangle ADE = \frac{1}{4}(\triangle ABC) = \frac{1}{3}(\text{四邊形 } BCDE \text{ 面積})$$

因此

$$\triangle ABC = \frac{4}{3}\cdot\text{四邊形 } BCDE \text{ 面積} = \frac{4}{3}\cdot 48 = 64$$ □

4. 下圖中，圓內兩平行弦之弦長分別爲 10 與 14，且相距 6，若平行此兩弦且與此兩弦等距之弦長爲 $\sqrt{a}$，試求 a 之值。 184

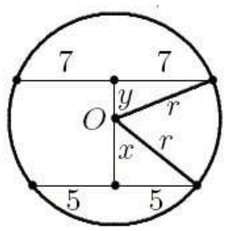


解答: **【解法一】** 令 x 爲圓心 O 到弦長爲 10 的距離，而 y 爲 O 到弦長爲 14 的距離。令 r 爲半徑，則

$$\begin{aligned} & x^2 + 25 = r^2 \\ & y^2 + 49 = r^2 \\ \text{所以}\quad & x^2 + 25 = y^2 + 49 \\ \text{因此}\quad & x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 24 \end{aligned}$$

1

若兩條弦在圓心的同一邊，則 $x-y=6$，若不同邊，則 $x+y=6$，但若 $x-y=6$，可知 $x+y=4$，矛盾，所以 $x+y=6$，因此 $x-y=4$，可解得 $x=5$ 和 $y=1$。因此，$r^2=50$，所以平行兩弦中間的弦距圓心 2。令此弦長 $2d$，則 $d^2+4=50$, $d^2=46$，且 $a=(2d)^2=184$。



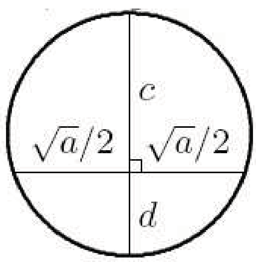
【**解法二**】 垂直弦長爲 $\sqrt{a}$ 的直徑被分爲 c 和 d 的長度，則

$$cd = \left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2 = \frac{a}{4}$$

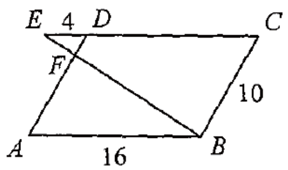
若將弦上移及下移 3 單位長，可得

$$(c-3)(d+3) = \left(\frac{14}{2}\right)^2 \tag{1}$$
$$(c+3)(d-3) = \left(\frac{10}{2}\right)^2 \tag{2}$$

(1) 加 (2) 可得 $2cd - 18 = 49 + 25 = 74$，因此 $2cd = 92$，所以 $a = 4cd = 184$。
□



5. 如下圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，$\angle ABC = 120°$, $\overline{AB} = 16$, $\overline{BC} = 10$，延長 $\overline{CD}$ 至 E，使得 $\overline{DE} = 4$，若 $\overline{BE}$ 交 $\overline{AD}$ 於 F，求 $\overline{DF}$ 的長度。 2



解答: 【**解法一**】 因爲 $\overline{AD}//\overline{BC}$，所以 $\triangle FDE$ 相似於 $\triangle BCE$，因此

$$\frac{\overline{FD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}} \text{ 或 } \overline{FD} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}} \cdot \overline{BC} = \frac{4}{4+16} \cdot 10 = 2$$

【**解法二**】 因爲 $\angle BFA = \angle EFD$ 且 $\angle FAB = \angle FDE$，所以 $\triangle FAB$ 相似於 $\triangle FDE$，因此

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} \text{ 或 } \overline{FA} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{FD}}{\overline{DE}} = \frac{16}{4}\overline{FD}$$

又由於 $\overline{FA} + \overline{FD} = \overline{AD} = \overline{BC} = 10$，則 $4\overline{FD} + \overline{FD} = 10$，故 $\overline{FD} = 2$。 □

6. 隨機取出 60 的一個正因數，試求取出此正因數會小於 7 的機率。 $\frac{1}{2}$

解答: 因為 $60 = 2^2 \times 3 \times 5$，共有 $(2+1)\times(1+1)\times(1+1) = 12$ 個正因數，其中有

$$1, 2, 3, 4, 5, 6$$

共 6 個正因數會小於 7，故所求機率為 $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$。 □

7. 將 1998 分解成二個正整數相乘，求此二個正整數相差的最小值。 17

解答: 質因數分解 $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$，分成兩個正整數的乘積，共有八種組合：

$$\begin{aligned}1998 &= 1 \times 1998 = 2 \times 999\\ &= 3 \times 666 = 6 \times 333\\ &= 9 \times 222 = 18 \times 111\\ &= 27 \times 74 = 37 \times 54\end{aligned}$$

兩數之差的最小值為 $54 - 37 = 17$。 □

8. 設 x 的三進位表示法是 12112211122211112222，試求 x 的九進位表示法的第一位 (從左邊算起) 數字。 5

解答: 將 x 的 3 進位成對表示，改寫式子為，

$$\begin{aligned}x &= (1\cdot 3^{19} + 2\cdot 3^{18}) + (1\cdot 3^{17} + 2\cdot 3^{16}) + \cdots + (2\cdot 3 + 2)\\ &= (1\cdot 3 + 2)(3^2)^9 + (1\cdot 3 + 1)(3^2)^8 + \cdots + (2\cdot 3 + 2)\end{aligned}$$

所以 x 的 9 進位，第一個數字為 $1\cdot 3 + 2 = 5$。 □

9. 一個實數的等比數列，前兩項的和是 7，前六項的和是 91，試求前四項的和。 28

解答: 令 a 和 r 為此等比級數首項及公比，則

$$a + ar = 7 \tag{3}$$

$$\frac{a(r^6-1)}{r-1} = 91 \tag{4}$$

將上面的 (4) 除以 (3) 可得到

$$\frac{a(r^6-1)}{(r-1)a(r+1)} = \frac{91}{7} = 13$$

化簡後，

$$\frac{(r^2-1)(r^4+r^2+1)}{r^2-1} = r^4 + r^2 + 1$$

所以，

$$\begin{aligned} r^4+r^2+1&=13\\ (r^2+4)(r^2-3)&=0 \end{aligned}$$

因此 $r^2=3$，且

$$\begin{aligned} a+ar+ar^2+ar^3&=(a+ar)(1+r^2)\\ &=7(4)=28 \end{aligned}$$ □

10. 定義 $[a,b,c]=\frac{a+b}{c}$，其中 $c\neq 0$，試求$[[60,30,90],\ [2,1,3],\ [10,5,15]]$。 2

解答: 由題意可知，

$$\begin{aligned} [60,30,90]&=\frac{60+30}{90}=1\\ [2,1,3]&=\frac{1+2}{3}=1\\ [10,5,15]&=\frac{10+5}{15}=1 \end{aligned}$$

則

$$[[60,30,90],[2,1,3],[10,5,15]]=[1,1,1]=\frac{1+1}{1}=2$$ □

∼全卷完∼