承辦單位：國立中山大學應用數學系

答案：

1.	0	2.	2	3.	22 吋	4.	$\frac{1}{16}$	5.	600
6.	4227	7.	$1:2$	8.	$\frac{5}{4}=1.25;\ \frac{35}{4}=8.75$	9.	$\sqrt{b^2-3}$	10.	$2:3$
11.	$12\sqrt{3}+14\pi$	12.	5	13.	$22.5°$	14.	2	15.	$\sqrt{2}$
16.	$200\sqrt{3}$	17.	$25\sqrt{5}$	18.	$b(ab+2)=ab^2+2b$	19.	$\frac{2AC-B^2}{A^2}$	20.	3

注意事項：

1. 本試卷共 20 題計算題，每一題 5 分。
2. 考試時間： 10：00∼12：00。
3. 請將詳細步驟書寫於題目下方空白處，答案必須化簡並書寫於上方指定處。
4. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。

---

1. 若 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=3$，求 $a^3+\frac{1}{a^3}$。

解答: 因為

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=3$$
$$a+\frac{1}{a}=\pm\sqrt{3}$$

所以

$$\begin{aligned}a^3+\frac{1}{a^3}&=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2-1+\frac{1}{a^2}\right)\\&=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-3\right)\\&=\pm\sqrt{3}(3-3)=0\end{aligned}$$

□

2. 若 $4x^3-8x^2-63x-9=0$ 之所有根之和為何？

解答: 由根與係數關係可知，三根之和為 $-\left(\frac{-8}{4}\right)=2$。 □

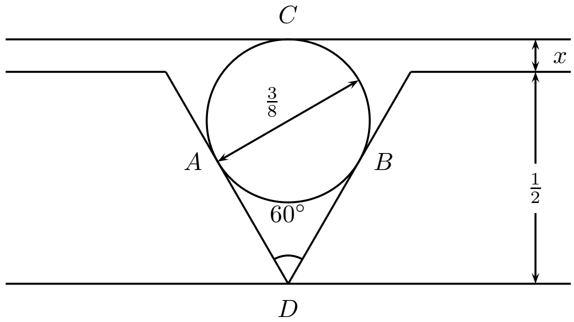
3. 一直角三角形的斜邊長為 10 吋，其內切圓之半徑為 1 吋，則此三角形的周長為何？

解答: 設兩股長爲 x, y，由切線長性質知

$$x+y=10+2\cdot 1=12$$

因此三角形之周長爲 $10+12=22$。 □

4. 下圖中若 A, B, C 爲切點，求 x 值？



解答: 設 O 爲圓心，半徑爲 r，因爲 $\angle D=60^\circ$，所以 $\overline{DO}=2r$，且因 $\triangle ABC$ 成等邊三角形，由題意可知 $r=\dfrac{3}{16}$，所以

$$\begin{aligned}\overline{DC}&=\overline{DO}+\overline{CO}=\overline{DO}+r=2r+r=3r\\&=3\times\left(\frac{3}{16}\right)=\left(\frac{9}{16}\right)\end{aligned}$$

因爲 $3r=x+\dfrac{1}{2}$，所以 $x=3r-\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{16}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{16}$。 □

5. 一火車出發後一小時出事了，停留半小時後以原速率之 $\dfrac{3}{4}$ 進行，結果到達目的地遲 $3\dfrac{1}{2}$ 小時。若出事之地點向前移 90 哩時，則火車將達目的地只遲 3 小時。整個行程長之哩數爲何？

解答: 設全程爲 x 哩，原速率爲 v，以時間爲等式，則

$$\frac{x-v\cdot 1}{\frac{3}{4}v}+1+\frac{1}{2}-\frac{x}{v}=3\frac{1}{2} \tag{1}$$

$$\frac{x-v\cdot 1-90}{\frac{3}{4}v}+1+\frac{1}{2}-\frac{x}{v}+\frac{90}{v}=3\frac{1}{2} \tag{2}$$

由 (1) 減去 (2) 可得

$$\frac{90}{\frac{3}{4}v}-\frac{90}{v}=\frac{1}{2}$$

因此 $3v=180,\ v=60$，代入 (1) 可得 $x=600$。 □

6. 欲描 $f(x)=ax^2+bx+c$ 之圖形，須作一表。對於 x 之值以等間隔之值增加時，函數之值依次爲 3844, 3969, 4096, 4227, 4356, 4489, 4624 及 4761，其中有一不正確者爲何？

解答: 設 x 之值以 h 之等間隔而增加，則函數之值依次爲

$$f(x),\ f(x+h),\ f(x+2h),\ \ldots,\ f(x+7h)$$

且

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= a(x+h)^2+b(x+h)+c-(ax^2+bx+c) \\ &= 2ahx+ah^2+bh \end{aligned}$$

由於函數之值的差爲 x 之一次式，可見值之增加與 x 值成比例，即若 x 依次增加 h 時，函數值之差亦依次以同量 $(2ah^2)$ 增加，但其所列之值

$$3844,\ 3969,\ 4096,\ 4227,\ 4356,\ 4489,\ 4624,\ 4761$$

的差別爲

$$125,\ 127,\ 131,\ 129,\ 133,\ 135,\ 137$$

可見 4227 是錯的，因 4227 的存在，致使無法以同量增加，應爲 4225。 □

7. 若一等差級數之前十項之和爲其前五項之和的四倍時，則首項與公差之比值爲何？

解答: 設首項爲 a，公差爲 d，則

$$S_{10}=\frac{10}{2}\left[2a+(10-1)d\right]=10a+45d \tag{3}$$

$$S_5=\frac{5}{2}\left[2a+(5-1)d\right]=5a+10d \tag{4}$$

已知

$$S_{10}=4S_5 \tag{5}$$

將 (5) 代入 (3) 和 (4)，化簡可得

$$\begin{aligned} 10a+45d &= 4(5a+10d) \\ 5d &= 10a \end{aligned}$$

故 $\dfrac{a}{d}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$。 □

8. 在半徑爲 5 單位之圓中，$\overline{CD}$ 與 $\overline{AB}$ 爲互相垂直的直徑，一弦 $\overline{CH}$ 交 $\overline{AB}$ 於 K，且長爲 8 單位，而直徑 $\overline{AB}$ 被分成二線段，則兩線段長度分別爲何？

解答: 設圓心 O，且設 $\overline{AK}=x$，則 $\overline{KB}=10-x, \overline{OK}=5-x$，因此

$$\overline{CK}=\sqrt{(\overline{CO})^2+(\overline{OK})^2}$$

$$= \sqrt{5^2 + (5 - x)^2}$$

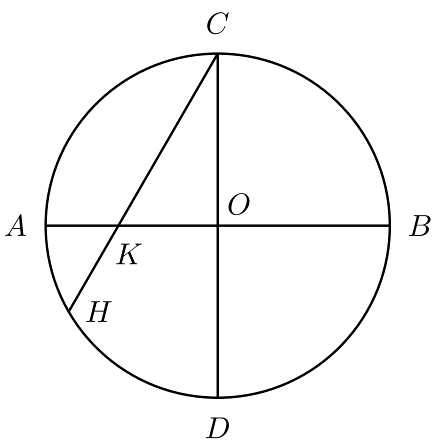
可知 $\overline{HK} = 8 - \overline{CK} = 8 - \sqrt{5^2 + (5 - x)^2}$。
因爲 $\triangle AKH \sim \triangle CKB$，所以 $\overline{CK} \cdot \overline{HK} = \overline{AK} \cdot \overline{BK}$，即

$$\sqrt{5^2 + (5 - x)^2} \cdot \left[8 - \sqrt{5^2 + (5 - x)^2}\right] = x \cdot (10 - x)$$

化簡可得

$$\begin{aligned} 8\sqrt{5^2 + (5 - x)^2} - \left[5^2 + (5 - x)^2\right] &= 10x - x^2 \\ 8\sqrt{50 - 10x + x^2} &= 50 \\ 64(50 - 10x + x^2) &= 2500 \\ 16x^2 - 160x + 175 &= 0 \\ (4x - 5)(4x - 35) &= 0 \\ x &= \frac{5}{4}, \frac{35}{4} \end{aligned}$$

□



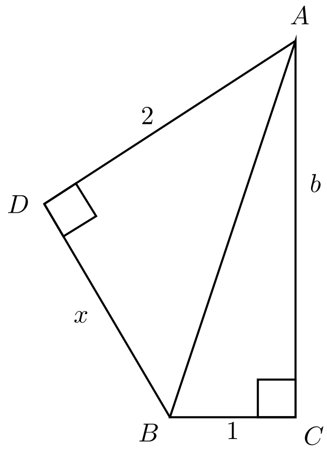
9. 在直角三角形 ABC 之斜邊 $\overline{AB}$ 上另做一直角三角形 ABD，並以 $\overline{AB}$ 爲斜邊。若 $\overline{BC} = 1, \overline{AC} = b$，且 $\overline{AD} = 2$，則 $\overline{BD}$ 爲何？

解答: 設 $\overline{BD} = x$，則

$$x^2 + 2^2 = (\overline{AB})^2 = 1^2 + b^2$$

因此 $x^2 = b^2 - 3$，故 $x = \sqrt{b^2 - 3}$。

□

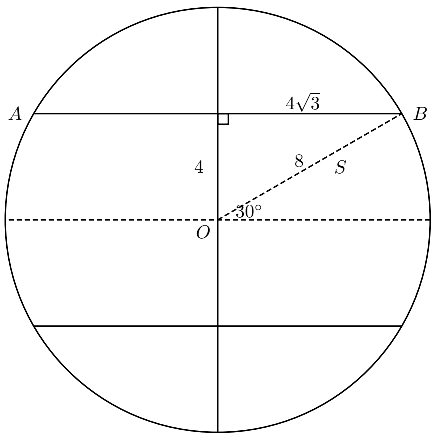


10. 一正三角形之高等於一圓之半徑，另一正三角形內接於此圓，則此兩三角形周長之比爲何？

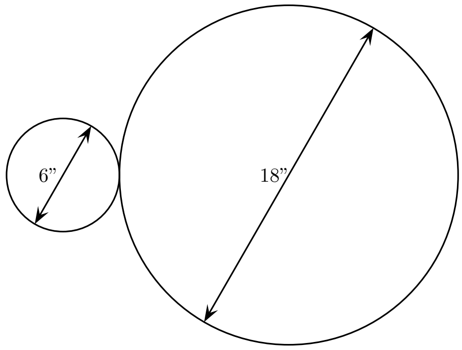
解答: 【**解法一**】 設圓半徑爲 r，由題意可知，第一個正三角形的邊長爲 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}r$，周長爲 $\dfrac{6}{\sqrt{3}}r$。

第二個正三角形的重心相當於圓心，所以可知此正三角形的高爲 $\dfrac{3r}{2}$，因此邊長爲 $\sqrt{3}r$，周長爲 $3\sqrt{3}r$，故兩正三角形的周長比爲 $\dfrac{6}{\sqrt{3}}r : 3\sqrt{3}r = 2 : 3$。

【**解法二**】 如下圖所示，兩正三角形邊長之比等於高之比，即 $1 : \dfrac{3}{2} = 2 : 3$。(因 O 爲內接於圓之正三角形的重心) □



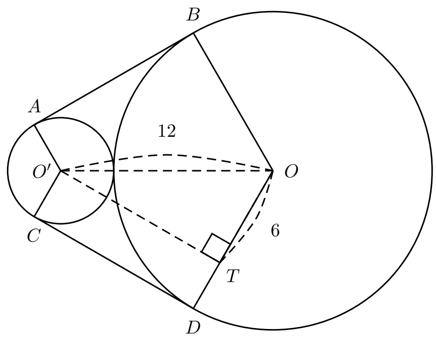
11. 有直徑爲 6 吋及 18 吋之兩柱，如圖所示放置且由金屬線綁在一起，則圍繞著它們的最短金屬線長爲何？



解答: 外分切線長為 $\sqrt{(9+3)^2-(9-3)^2} = 6\sqrt{3}$，因為直角三角形 $OO'T$, $\overline{OT} = \frac{1}{2}\overline{OO'}$，所以 $\angle O'OT = 30°$, $\angle AO'C = \angle BOD = 120°$，因此

$$\overset{\frown}{AC} = \frac{120°}{360°}(2\pi\cdot 3) = 2\pi$$
$$\overset{\frown}{BD} = \frac{240°}{360°}(2\pi\cdot 9) = 12\pi$$

可見最短之線由兩外公切線及 $\overset{\frown}{AC}$ 及 $\overset{\frown}{BD}$ 組成，故為 $2\times 6\sqrt{3}+2\pi+12\pi = 12\sqrt{3}+14\pi$。 □



12. 若 $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}+1=0$，則 $4x$ 為何？

解答: 化簡得

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1}+1 &= -\sqrt{x+1}\\ x-1+1+2\sqrt{x-1} &= x+1 \quad (\text{等號兩邊同時平方})\\ 2\sqrt{x-1} &= 1 \quad (\text{移項整理})\\ 4(x-1) &= 1\\ 4x &= 5\end{aligned}$$
□

13. 時鐘在 $2:15$ 的時針和分針兩針夾角為何？

解答: 因為 15 分為 $\frac{1}{4}$ 小時，所以時針會往前移動 $\frac{1}{4}\times 30°$，故在 $2:15$ 的兩針夾角為

$$30° - \frac{1}{4}\times 30° = 22.5°$$
□

14. 數 x, y, z 成 2, 3, 5 之比，三數之和爲 100，且 $y = ax - 10$，則 a 值爲何？

解答: 利用合分比可知

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+x}{2+3+5} = \frac{100}{10} = 10$$

可知 $x = 20, y = 30$，且

$$\begin{aligned} y &= ax - 10 \\ 30 &= 20a - 10 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

□

15. 兩圖形 $x^2 + y = 10$ 與 $x + y = 10$ 交兩點，此兩點的距離爲何？

解答: 解聯立方程式，可得

$$\begin{aligned} x^2 + 10 - x &= 10 \\ x^2 - x &= 0 \\ (x-1)x &= 0 \\ x &= 0, 1 \end{aligned}$$

因此兩交點爲 $(0, 10), (1, 9)$，故兩點的距離爲 $\sqrt{(1-0)^2 + (10-9)^2} = \sqrt{2}$。 □

16. 內切於正六邊形的圓面積爲 100π，則此六邊形之面積爲何？

解答: 設此內切圓半徑爲 r，則 $100\pi = \pi r^2$，可知 $r = 10$，且 r 相當於此正六邊形的邊心距，所以正六邊形的一邊長爲 $\frac{2}{\sqrt{3}}10 = \frac{20\sqrt{3}}{3}$，故面積爲 $6 \times \frac{1}{2} \times \frac{20\sqrt{3}}{3} \times 10 = 200\sqrt{3}$。 □

17. 若 $4^x - 4^{x-1} = 24$，則 $(2x)^x$ 值爲何？

解答: 因爲

$$\begin{aligned} 4^x - 4^{x-1} &= 24 \\ 4^{x-1}[4-1] &= 24 \\ 4^{x-1} &= 8 = 2^3 \\ 2^{2(x-1)} &= 2^3 \\ 2(x-1) &= 3 \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

因此 $(2x)^x = \left(2 \cdot \frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}} = 25\sqrt{5}$。 □

學校：　　　　　　　　姓名:　　　　　　　　編號:

18. 若 $xy = b$ 且 $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = a$，則 $(x+y)^2$ 之值為何？

解答:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2+y^2+2xy \\ &= x^2y^2\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}\right] \\ &= b^2 \times \left[a+\frac{2}{b}\right] \\ &= ab^2+2b\end{aligned}$$ □

19. 設 $Ax^2+Bx+C=0$ 之根為 r 與 s，而 $x^2+px+q=0$ 之根為 r^2 與 s^2，則 p 值為何 (用 A, B, C 表示) ?

解答: 利用根與係數關係可知

$$\begin{aligned}r^2+s^2 &= -p \\ r+s &= -\frac{B}{A} \\ rs &= \frac{C}{A}\end{aligned}$$

利用平方和關係可知 $p = -(r^2+s^2) = -(r+s)^2+2rs$，故 $p = -\dfrac{B^2}{A^2}+\dfrac{2C}{A} = \dfrac{2CA-B^2}{A^2}$。 □

20. 將 695 寫成一階乘式，即 $695 = a_1 + a_2\cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \cdots + a_n \cdot n!$，其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是整數並且 $0 \le a_k \le k$，而 $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$，求 a_4。

解答:

$$695 = a_1 + a_2(2\cdot 1) + a_3(3\cdot 2\cdot 1) + a_4(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1) + a_5(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)$$

即

$$695 = a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 24a_4 + 120a_5$$

其中 $0 \le a_k \le k$，因此 a_k 必等於 5 (為得 695)，而 $a_4 \ne 4$，因為

$$5\cdot 120 + 4\cdot 24 > 695$$

同樣 a_4，不可小於 3，因為若 $a_4 = 2$，則

$$2\cdot 24 + 3\cdot 6 + 2\cdot 2 + 1 < 95$$

所以 $a_4 = 3$。

驗算：

$$5\cdot 120 + 3\cdot 24 + 3\cdot 6 + 2\cdot 2 + 1 = 695$$ □

～全卷完～