

承辦單位：國立中山大學應用數學系

答案：

1. 835 2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{1}{8}$ 5. 8
6. $\frac{266664}{5} = 53332.8$ 7. 162 8. 5 9. 154 10. 62
11. 115 12. $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ 13. 18 14. $\frac{7}{16}$ 15. 0
16. 3722 17. $\frac{\sqrt{65}}{2}$ 18. $\frac{5}{16}$ 19. $\frac{5}{3}$ 20. $\frac{5}{3}\pi - 2\sqrt{3}$

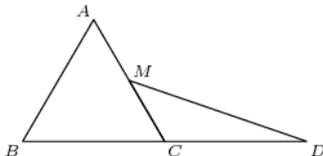
注意事項：

1. 本試卷共 20 題計算題，每一題 5 分。
2. 考試時間：10:00~12:00。
3. 請將詳細步驟書寫於題目下方空白處，答案必須化簡並書寫於上方指定處。
4. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。

1. 請問：從 1 到 2005 的整數中，有 ① 個數是 3 或是 4 的倍數但不是 12 的倍數？

解答：所求為 $\left[\frac{2005}{3}\right] + \left[\frac{2005}{4}\right] - \left[\frac{2005}{12}\right] \cdot 2 = 668 + 501 - 167 \cdot 2 = 835$ 。 □

2. 正三角形 ABC 的邊長為 2，點 M 是 \overline{AC} 的中點且點 C 是 \overline{BD} 的中點。請問：三角形 CDM 的面積 = ② ？



解答：因為三角形 CDM 面積為三角形 ABC 面積的一半，因此所求為 $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} (2)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。 □

3. 有個信封中有八張紙幣，分別是壹圓、伍圓、拾圓、貳拾圓各有兩張。若從信封中隨機取出兩張，取後不放回，請問：此兩張的總值不小於 20 元的機率 = ③ ？

解答：總值低於 20 的情形有 $(1, 1)$, $(5, 5)$, $(1, 5)$, $(1, 10)$, $(5, 10)$ ，因此機率為 $\frac{1}{\binom{8}{2}} + \frac{1}{\binom{8}{2}} + \frac{2}{\binom{8}{2}} + \frac{2}{\binom{8}{2}} + \frac{2}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{2}$ ，則所求機率為 $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 。 □

4. 方程式 $x^2 + mx + n = 0$ 的兩根為方程式 $x^2 + px + m = 0$ 根的一半，其中 m, n, p 皆不為零。請問： $\frac{n}{p} =$ ④ ？

學校：

姓名：

編號：

解答：假設 $x^2 + px + m = 0$ 的兩根為 a, b ，利用根與係數得到 $a + b = -p$, $ab = m$ ；再推得 $x^2 + mx + n = 0$ 的兩根為 $a/2, b/2$ ，利用根與係數得到 $(a + b)/2 = -m$, $ab/4 = n$ 。因此 $m = p/2$, $n = m/4 \Rightarrow n = p/8 \Rightarrow \frac{n}{p} = 1/8$ 。□

5. 甲的手機號碼為 $555 - abc - defg$ ，其中 a, b, c, d, e, f, g 皆為一位數且為遞增且不為 0, 1。請問：甲的手機有 ⑤ 種不同的號碼？

解答：因為遞增且一位數，所以必從 2 到 9 中選出七個數字並由小到大排列為號碼，因此有 $\binom{8}{7} = 8$ 種不同的號碼。□

6. 將五個數字 1, 3, 5, 7, 8 排出一個五位數，請問：所有五位數的平均 = ⑥ ？

解答：因為 $\frac{1+3+5+7+8}{5} = \frac{24}{5}$ ，所以五位數的平均為 $\frac{24}{5} \cdot (11111) = 53332.8$ 。□

7. 一袋中有 40 顆球，其標號從 1 到 10 的球各四顆。今隨機取出四顆球並取後不放回。假設 p 是四球數字皆相同的機率； q 是四球中有兩球數字相同，另兩球數字相同的機率。請問： $\frac{q}{p} =$ ⑦ ？

解答：依題意得到 $p = \frac{\binom{10}{1}\binom{4}{4}}{\binom{40}{4}}$ ； $q = \frac{\binom{10}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{40}{4}}$ ；所求為 $\frac{q}{p} = \frac{45 \cdot 6 \cdot 6}{10} = 162$ 。□

8. 梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ 且點 E, F 是 $\overline{BC}, \overline{DA}$ 的中點。已知四邊形 $ABEF$ 面積是四邊形 $EFCD$ 面積的兩倍，請問： $\frac{AB}{DC} =$ ⑧ ？

解答：依題意得到 $\frac{AB+EF}{EF+CD} = 2$, $EF = \frac{AB+CD}{2} \Rightarrow \frac{3AB+CD}{AB+3CD} = 2 \Rightarrow \overline{AB} = 5\overline{CD} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = 5$ 。□

9. 假設 x, y 皆為兩位數使得 y 是 x 的個位數和十位數交換而得，且滿足 $x^2 - y^2 = m^2$ ，其中 m 是正整數。請問： $x + y + m =$ ⑨ ？

解答：假設 $x = 10a + b$, $y = 10b + a$, $a > b$ ，依題意得到 $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = (9a - 9b)(11a + 11b) = 99(a - b)(a + b) = m^2$ 。因為 $99 = 3^2 \cdot 11$ ，所以 $a + b = 11$ ，因此 $a - b$ 為完全平方數，找到 $(a, b) = (6, 5)$ ，則所求為 $x + y + m = 65 + 56 + 33 = 154$ 。□

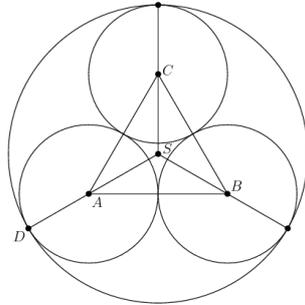
10. 有個集合為 $\{1, 2, \dots, 100\}$ ，其中有個子集 B 且 B 中沒有兩個元素之和為 125，請問： B 最多可以有 ⑩ 元素？

解答：首先 1, 2, ..., 24 可以在 B 中，因為 $125 = 25 + 100, 26 + 99, \dots, 62 + 63$ ，有 38 個組合，因此最多可以有 $24 + 38 = 62$ 個元素。□

11. 甲有 20 枚硬幣，其中只有五分及十分兩種硬幣。假設五分硬幣與十分硬幣的數量互換，則總值會增加美元 70 分。請問：她的硬幣總值 = ⑪ 分？

解答： 假設五分硬幣個數為 d ，則十分硬幣個數為 $20-d$ ，依題意得到 $5 \cdot (20-d) + 10 \cdot d = 5 \cdot (d) + 10 \cdot (20-d) + 70 \Rightarrow d = 17$ ，因此硬幣總值為 $5 \cdot 17 + 10 \cdot 3 = 115$ 分，相當於美金 1.15 元。 □

12. 三個半徑為 1 的圓兩兩外切且皆與一個大圓內切，請問：大圓半徑 = 12 ？

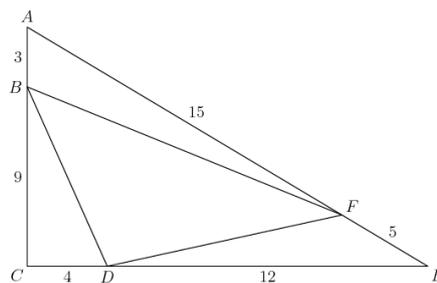


解答： 中間是邊長為 2 的正三角形，所以 $\overline{SA} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，因此大圓半徑為 $1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ 。 □

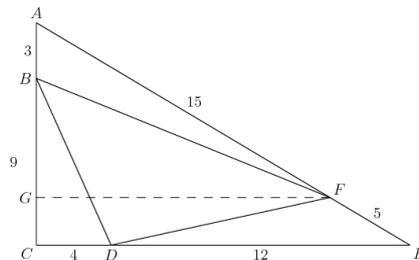
13. 甲的年齡與乙的年齡皆為兩位數，其中一人的年齡恰好是另一人年齡中十位數與個位數互換。已知在五年後，甲的年齡是乙年齡的兩倍，請問：兩人的年齡差 13 齡？

解答： 假設 Jack 的年齡為 $10a+b$ ，則 Bill 的年齡為 $10b+a$ ，依題意得到 $(10a+b)+5 = 2(10b+a+5) \Rightarrow 8a = 19b+5$ 。找到一組解 $(a,b) = (3,1)$ ，因此兩人年齡差為 $31 - 13 = 18$ 。 □

14. 在直角三角形 ACE 中， $\overline{AC} = 12$ ， $\overline{CE} = 16$ ， $\overline{EA} = 20$ ，且點 B ， D ， F 分別落在 \overline{AC} ， \overline{CE} ， \overline{EA} 上，使得 $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{CD} = 4$ ， $\overline{EF} = 5$ 。請問： $\triangle DBF$ 面積與 $\triangle ACE$ 面積比值 = 14 ？



解答： 作一條直線過 F 點且平行 \overline{CE} 交 \overline{AC} 於 G 點



因為 $\triangle AFG \sim \triangle AEC$, $\frac{AF}{AE} = \frac{3}{4}$, 得到 $\overline{GF} = 12$, $\overline{AG} = 9$ 。因此

$$\begin{aligned}\triangle BDF \text{ 面積} &= \triangle ACE \text{ 面積} - \triangle ABF \text{ 面積} - \triangle BCD \text{ 面積} - \triangle DEF \text{ 面積} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3 \\ &= 96 - 18 - 18 - 18 \\ &= 42\end{aligned}$$

因此所求為 $\frac{42}{96} = \frac{7}{16}$ 。 \square

15. 有某一數列：2001, 2002, 2003, ...，從第四項開始的規則為第 n 項為第 $n-3$ 項加上第 $n-2$ 項減去第 $n-1$ 項，例如：第四項為 $2001 + 2002 - 2003 = 2000$ 。請問：第 2004 項 = 15 ?

解答：依題意： $a_1 = 2001, a_2 = 2002, a_3 = 2003, a_4 = 2001 + 2002 - 2003 = 2000, a_5 = 2002 + 2003 - 2000 = 2005, a_6 = 2003 + 2000 - 2005 = 1998, a_7 = 2000 + 2005 - 1998 = 2007, \dots$ 。找到規則 $a_{2k+1} = 1999 + 2k, a_{2k} = 2004 - 2k$ ，因此所求為 $a_{2004} = a_{2 \cdot 1002} = 2004 - 2 \cdot 1002 = 0$ \square

16. 兩等差數列分別為 1, 4, 7, ... 及 9, 16, 23, ...。假設集合 S 是聯集兩數列前 2004 項，請問： S 中有 16 個元素？

解答：數列 A ：1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, ...；數列 B ：9, 16, 23, 30, ...
可以知道兩數列第一個相同的數為 16，且公差為 $[3, 7] = 21$ ，因此共同的數所成的數列 C ：16, 37, 58, ...。已知 $A_{2004} = 3 \cdot 2004 - 2 = 6010, B_{2004} = 7 \cdot 2004 + 2 = 14030$ ，假設數列 C 的最後一項為 $21k - 5$ ，推得 $21k - 5 \leq 6010 \Rightarrow k = 286$ ，因此數列 C 中有 286 個數。所求為 $2004 + 2004 - 286 = 3722$ 。 \square

17. 有個三角形的三邊分別為 5, 12, 13，且有外接圓與內切圓。請問：兩圓的圓心相距 = 17 ?

解答：假設三角形的三個點為 $(0, 0), (5, 0), (0, 12)$ ，因為此三角形為直角三角形，所以外接圓圓心在斜邊的中點 $(\frac{5}{2}, 6)$ 。假設內切圓的半徑為 r ，利用三角形面積 $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = \frac{1}{2}(5r + 12r + 13r) \Rightarrow r = 2$ ，因此內切圓圓心為 $(2, 2)$ 。所求為 $\sqrt{(\frac{5}{2} - 2)^2 + (6 - 2)^2} = \frac{\sqrt{65}}{2}$ 。 \square

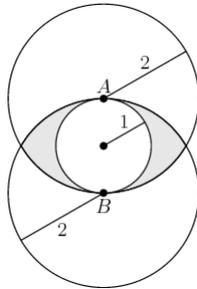
18. 一個立方體的面不是紅色就是藍色，且選擇的機率皆為 $\frac{1}{2}$ 及每個顏色皆獨立。請問：將立方體放置水平面上，垂直的四個面顏色皆相同的機率 = 18 ?

解答：先考慮同顏色為紅色，若有 4 個面同顏色，有 $\binom{3}{1} = 3$ 種；若有 5 個面同顏色，有 $\binom{6}{1} = 6$ 種；若有 6 個面同顏色，有 $\binom{6}{6} = 1$ 種。因此總共有 $2(3 + 6 + 1) = 20$ 種，因此所求機率為 $\frac{20}{2^6} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$ 。 \square

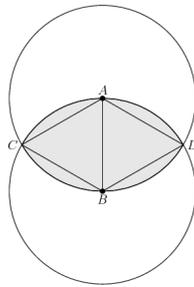
19. 在三角形 ABC 中， $\overline{AB} = 7, \overline{AC} = 8, \overline{BC} = 9$ ，且點 D 在三角形 ABC 外接圓上使得 \overline{AD} 為 $\angle BAC$ 的角平分線。請問： $\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} =$ 19 ?

解答：因為 $\angle BAD = \angle CAD$ ，所以 $\overline{BD} = \overline{CD}$ ，利用托勒密定理得到 $7\overline{CD} + 8\overline{BD} = 9\overline{AD} \Rightarrow 15\overline{CD} = 9\overline{AD} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$ 。 □

20. 一個半徑為 1 的小圓內切於兩個半徑為 2 的大圓於 A, B 兩點，使得 \overline{AB} 為小圓的直徑，如圖所示。請問：圖中灰色面積 = 20 ？



解答：先將圖形改成



一個弓形的面積為 $\frac{1}{6} \cdot 2^2\pi - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$ ，因此灰色面積為 $4\left(\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2\right) = \frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$ 。因此所求為 $\left(\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}\right) - 1^2\pi = \frac{5}{3}\pi - 2\sqrt{3}$ 。 □

~全卷完~