承辦單位：國立中山大學應用數學系

答案：

1. 3	2. $\frac{109}{25}$	3. 18	4. 4	5. 5
6. 58	7. 1	8. $\frac{4}{9}$	9. 108	10. $\frac{5}{7}$
11. $\frac{3}{2}$	12. 996	13. 37	14. 19	15. 8078
16. 1260	17. 16	18. 2018	19. $\frac{1}{14}$	20. $\frac{1}{3}$

注意事項：

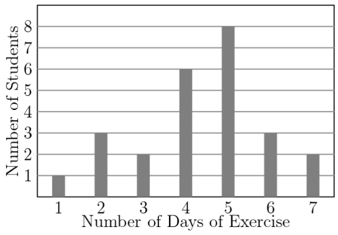
1. 本試卷共 20 題計算題，每一題 5 分。
2. 考試時間：10：00∼12：00。
3. 請將詳細步驟書寫於題目下方空白處，答案必須化簡並書寫於上方指定處。
4. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。

---

1. 已知一個五位數 $\underline{2}\ \underline{0}\ \underline{1}\ \underline{8}\ \underline{U}$ 可以被 9 整除。請問該數除以 8 後餘數爲何？

解答： 使用倍數判別法得知 $2+0+1+8+U$ 一定會爲 9 的倍數，因此唯一的可能只有 $U=7$。因此該數爲 20187，除以 8 後餘數爲 $\boxed{3}$。 □

2. 賈老師針對班上的同學，進行每週達到至少 30 分鐘運動天數的調查。附表爲調查後的結果，縱軸爲學生的人數，橫軸爲達到至少 30 分鐘的運動天數。



請問班上同學達到至少 30 分鐘的運動天數的平均數爲何？

解答： 平均運動天數也就是總共運動天數除以總學生人數。總共的運動天數爲 $1\cdot1+2\cdot3+3\cdot2+4\cdot6+5\cdot8+6\cdot3+7\cdot2=109$ 天，總學生人數爲 $1+3+2+6+8+3+2=25$ 人。因此平均運動天數爲 $\frac{109}{25}=\boxed{4.36}$。 □

3. 假設 N 爲各位數相乘爲 120 的最大的五位數。請問，N 的各位數總和爲何？

解答： 首先從萬位數開始看起，不可能爲 9 因爲 9 非爲 120 的因數，而 8 可以爲萬位數。而由於各位數相乘要爲 120，所以可以斷定剩餘的四個位數相乘必爲 $\frac{120}{8}=15$，因此在千位數擺上爲 15 因數的 5 是最好的選擇。接下來依序擺上 3, 1, 1 就可得到此五位數爲 85311。因此各位數總和爲 $8+5+3+1+1=\boxed{18}$。 □

4. 莱拉參加了五次滿分爲 100 分的數學考試，而她的得分都是介在 0 到 100 之間的整數。已知莱拉在前四次考試的得分都相同，而且她在最後一次考試中獲得了更高的分數。她這五次考試的平均得分爲 82 分。請問，莱拉在最後一次考試中獲得的分數有多少種可能？

解答： 假設前四次考試均爲 x 分，第五次考試得到 y 分。因此考試總得分爲 $4x+y=410$。前四次的考試成績必須小於 82 分，否則第五次無法獲得更高分。而第五次最高分爲 100 分，前四次的分數又要爲整數，所以前四次的分數只有 78, 79, 80, 81 四種可能。因此答案有 $\boxed{4}$ 種。 □

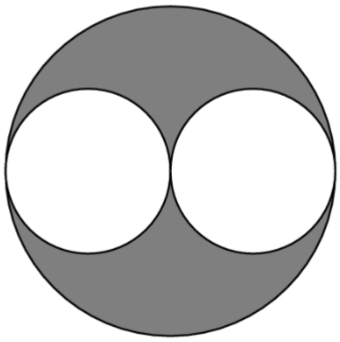
5. 除以 6 後的餘數爲 2、除以 9 後的餘數爲 5、除以 11 後的餘數爲 7，請問這樣的三位數有多少個？

解答： 我們發現一個關聯性，$11-7=4, 9-5=4, 6-2=4$。代表此數爲 6, 9, 11 的倍數再減去 4。而 6, 9, 11 的最小公倍數爲 $11\cdot 3^2\cdot 2=198$，所以此數可能的值就是 $198k-4$，其中 k 爲正整數。符合 $198k-4$ 爲三位數的 k 有 1, 2, 3, 4, 5。因此得到答案爲 $\boxed{5}$。 □

6. 在 2^8+1 到 $2^{18}+1$ 之間，請問有多少個完全立方數？

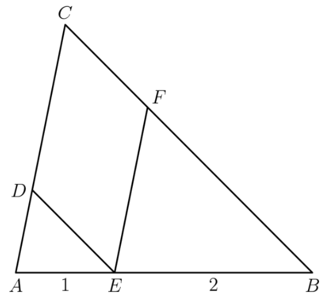
解答： 計算 $2^8+1=257$，大過此數的最小完全立方數爲 $7^3=343$。$2^{18}+1$ 的實際數值太大不易取得，但將此扣掉 1 後可以看到 $2^{18}=(2^6)^3=64^3$。因此，在此範圍之中的完全立方數有 $64-7+1=\boxed{58}$ 個。 □

7. 如圖，小圓的直徑剛好爲大圓的半徑。若兩個小圓的面積總和爲 1 平方單位，那麼陰影部分的面積爲何？



解答： 假設大圓半徑爲 R，那麼小圓的半徑即爲 $\frac{R}{2}$。由於圓的面積與其半徑的平方會成正比，因此可以知道小圓面積會是大圓面積的 $\frac{1}{4}$ 倍。而兩個小圓面積總和爲 1 平方單位，所以大圓面積爲 2 平方單位。陰影部分剛好爲大圓面積減去兩個小圓面積，因此陰影部分面積爲 $\boxed{1}$。 □

8. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}$ 上有一點 E 且 $\overline{AE}=1$、$\overline{EB}=2$。$\overline{AC}$ 上有一點 D 且 $\overline{DE}\parallel\overline{BC}$，$\overline{BC}$ 上有一點 F 且 $\overline{EF}\parallel\overline{AC}$。請問，四邊形 $CDEF$ 與 $\triangle ABC$ 面積的比值爲何？

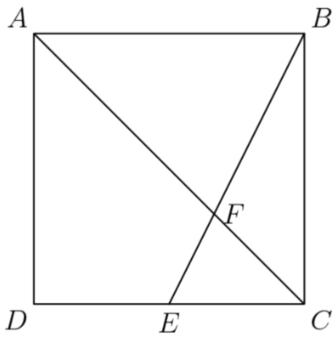


解答： 由於 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，根據同位角得知 $\angle ACB = \angle ADE$，而 $\triangle ABC$ 與 $\triangle AED$ 擁有共同的 $\angle A$，根據三角形 AA 相似，$\triangle ABC \sim \triangle AED$。同理，也可以輕易得到 $\triangle ABC \sim \triangle EBF$。兩個相似三角形的面積比值爲其邊長比值的平方，所以我們得到 $\triangle AED$ 面積爲 $\triangle ABC$ 面積的 $\frac{1}{9}$。同理，$\triangle EBF$ 面積爲 $\triangle ABC$ 面積的 $\frac{4}{9}$。

代表四邊形 $CDEF$ 與 $\triangle ABC$ 面積的比值爲 $1-(\frac{1}{9}+\frac{4}{9})=\frac{4}{9}$，因此答案爲 $\boxed{\frac{4}{9}}$。

□

9. 在正方形 $ABCD$ 中，點 E 爲 $\overline{CD}$ 之中點、點 F 爲 $\overline{BE}$ 與 $\overline{AC}$ 之交點。已知四邊形 $AFED$ 之面積爲 45，請問正方形 $ABCD$ 的面積爲何？

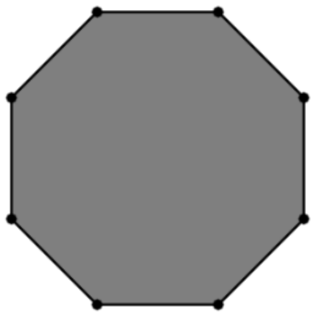


解答： 假設 $\triangle CEF$ 面積爲 x，那麼 $\triangle ACD$ 的面積即爲 $45+x$，而此正方形 $ABCD$ 的面積即爲 $2(45+x)=90+2x$。根據三角形 AA 相似，我們可以得知 $\triangle CEF \sim \triangle ABF$ 且邊長比爲 $1:2$，因此 $\triangle ABF$ 的面積爲 $4x$。現在我們得知了梯形 $ABED$ 的面積爲 $45+4x$，而此梯形剛好爲整個正方形面積的 $\frac{3}{4}$，所以我們可以建立一個等式：

$$45+4x=\frac{3}{4}(90+2x)$$

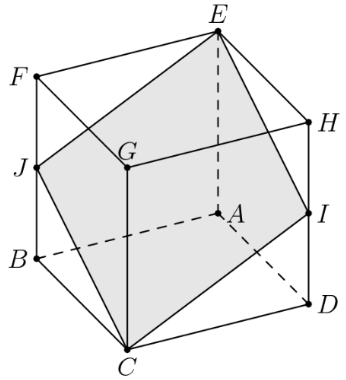
解得 $x=9$，代表正方形 $ABCD$ 的面積爲 $90+2x=90+2\cdot 9=\boxed{108}$。　□

10. 在正八邊形中任選三個頂點可以形成一個三角形。請問，此三角形至少有一邊剛好爲正八邊形的邊的機率爲何？



解答：先固定取兩相鄰頂點當底邊，共有 8 種選擇，而剩下第三個頂點的選擇有 6 種。但是當我們的選擇是三個點相鄰的三角形時會被重複計算，因此我們在考慮每個底邊時都需要消去一次，所以至少有一邊剛好爲正八邊形的邊的情況總共有 $8 \cdot 6 - 8$ 種。而若要計算總共的三角形數，就是在 8 個頂點中選擇 3 個，得到總共的三角形數爲 $\binom{8}{3} = 8 \cdot 7$ 個。因此此題答案爲 $\frac{8 \cdot 6 - 8}{8 \cdot 7} = \boxed{\frac{5}{7}}$。 □

11. 如圖，$ABCDEFGH$ 爲一正立方體，點 J 與點 I 分別爲 $\overline{FB}$ 與 $\overline{HD}$ 的中點。假設 R 爲四邊形 $EJCI$ 面積與正立方體任一面面積的比值，請問 R^2 爲何？



解答：從圖中可以明顯得知 $EJCI$ 爲一對稱圖形且爲邊長皆相等的菱形。假設此正立方體的邊長爲 s，那麼根據畢氏定理，可以得到在 $EJCI$ 中的 $\overline{EC} = \sqrt{3}s$ 以及 $\overline{JI} = \sqrt{2}s$，因此 $EJCI$ 面積爲 $\frac{\sqrt{6}s^2}{2}$。而因爲正立方體的邊長爲 s，所以正立方體任一面積爲 s^2。因此得到四邊形 $EJCI$ 面積與正立方體任一面面積的比值 $R = \frac{\frac{\sqrt{6}s^2}{2}}{s^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$，因此 $R^2 = \boxed{\frac{3}{2}}$。 □

12. 請問在三位數正整數 n 中，前 n 個正整數的和不是前 n 個正整數的積的因數之最大值爲何？

解答：**【解法一】** 前 n 個正整數的和爲 $\frac{(n)(n+1)}{2}$，但希望這不是前 n 個正整數的乘積(即 $n!$) 的因數。當 $n+1$ 是合數時，若且唯若其所有因數都將小於或等於 n，所以能夠與 $n!$ 中的因數對消，因此總和會是其因數之一，故 $n+1$ 必須爲質數此情況才會成立，而質數中最大的三位數爲 997，因此答案爲 $997 - 1 = 996$。

【解法二】 如同解法一，可推斷 $n+1$ 必爲質數。如果不能立即回想起最大的三位數質數是多少，可從題目所給的答案選項去選擇可能爲 n 的值。若 $n+1$ 爲偶數，即可被 2 整除，則選項 A、C、E 可先不考慮；由於 999 可被 9 整除，所以選項 D 也不考慮，故答案爲 996。 □

13. 請問 201^9 中有多少個正因數是完全平方數，或完全立方數，或兩者都是？

解答：**【解法一】** 將 201^9 作質因數分解，可得到 $3^9 \cdot 67^9$。一個完全平方數必須具有其質因數的次方數爲偶數，因此對於 3 和 67，完全平方數的次方數可能之選擇均爲 0, 2, 4, 6, 8，所以可產生 $5 \cdot 5 = 25$ 個完全平方數；而完全立方數則爲其質因數的次方數爲 3 的倍數，對於 3 和 67，其可能選擇的次方數均爲 0, 3, 6, 9，所以可產

生 $4\cdot 4=16$ 個完全立方數；最後，由於次方數爲 0 和 6 時，同時爲完全平方數與完全立方數，有重複計算的地方須扣除掉，其中重複的有 $3^0\cdot 67^0$, $3^0\cdot 67^6$, $3^6\cdot 67^0$ 和 $3^6\cdot 67^6$ 共 4 個，因此答案爲 $25+16-4=37$。

【解法二】 先觀察到 $201=67\cdot 3$，可分幾個情況來討論：

情況一： 因數是 3^n，可得到 $n=2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9$。

情況二： 因數是 67^n，與情況一相同。

情況三： 因數是 3 和 67 某數量相乘之某種組合。

由於須將生成平方數的數字跟與平方數數字相同的立方數作結合，簡單來說，要探討 n 的所有情況：

$n=2$ 時是一個平方數，也可以說是完全平方數，因爲它是偶數；

$n=3$ 時是一個立方數，也可以說是完全立方數，因爲它是 3 的倍數；

$n=4$ 時是一個平方數；

$n=6$ 時是既是平方數也是立方數，會有重複計算地可能，因此到另一種情況下再計算；

$n=8$ 時是一個平方數；

$n=9$ 時是一個立方數。

接著考慮子情況：

子情況一： 平方數彼此相同。因爲有 3 個平方項，且它們將與其他 3 個平方項配對，可得到 $3\cdot 3=9$ 種的可能性。

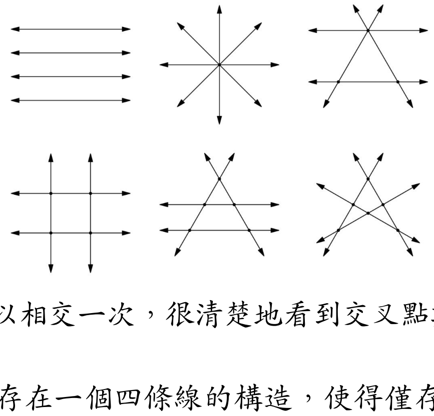
子情況二： 立方數彼此相同。因爲有 2 個立方項，且它們將與其他 2 個立方項配對，可得到 $2\cdot 2=4$ 種的可能性。

子情況三： $n=6$ 的成對數字。由於任何數字都可以與 $n=6$ 配對(因爲同時給出了平方數與立方數)，因此有 6 種可能，但因爲 3 和 67 都會產生不同結果，所以實際上有 $6\cdot 2=12$ 種的可能性。

所以答案爲 $6+6+9+4+12=37$。 □

14. 對於平面中一組四條不同的線，其中兩條或多條線上恰好有 N 個不同的點，請問 N 所有可能的值之總和爲何？

解答： 如下圖所示，可得到交點數 0, 1, 3, 4, 5, 6 的圖形。



因爲每條線最多可以相交一次，很清楚地看到交叉點數最大爲 $\binom{4}{2}=6$，先證明爲何無兩交點的圖形。

利用矛盾法，假設存在一個四條線的構造，使得僅存在兩個交點。令這兩點分別爲 A、B，考慮兩種情況：

情況一： 沒有線通過 A、B 兩點。因爲至少要有兩條線才可能有交點，且由於不能有額外交點，所以沒有通過 A 的線與通過 B 的線相交，所以通過 A 的線必與通過

B 的線平行，然後通過 B 的兩條線也互相平行，因此代表這兩條線它們是重合，故矛盾。

情況二： 有一線同時通過 A、B 兩點。必須有一線 l_a 通過 A、一線 l_b 通過 B，且這兩條線互相平行，因此第四條線 l 必須通過 A、B。不失一般性，假設 l 通過 A，由於 l 和 l_a 不能重合，因此它們不互相平行；由於 l 和 l_b 也不互相平行，代表 l_a 和 l_b 相交，故矛盾。

因此可推得結論說無兩交點的圖形存在，因此答案爲 $0+1+3+4+5+6=19$。□

15. 有一遞迴數列，由 $a_1=1,\ a_2=\frac{3}{7}$，且 $a_n=\frac{a_{n-2}\cdot a_{n-1}}{2a_{n-2}-a_{n-1}}$ 對所有的 $n\geq 3$ 所定義，則當 $p,\ q$ 是正整數時， a_{2019} 可寫成 $\frac{p}{q}$，求 $p+q$ 之值爲何？

解答： **【解法一】** 利用遞迴公式，可發現 $a_3=\frac{3}{11},\ a_4=\frac{3}{15},\ \ldots$，以此類推，對所有的 n，則 $a_n=\frac{3}{4n-1}$，設 $n=2019$，可得到 $a_{2019}=\frac{3}{8075}$，所以答案爲 8078。

爲了證明此公式成立，可利用數學歸納法證明。首先可以得知 $a_1=1$ 以及 $a_2=\frac{3}{7}$，均有符合公式；假設所有 $n\leq m$ 適用於某正整數 m，根據假設，可得到 $a_{m-1}=\frac{3}{4m-5}$ 且 $a_m=\frac{3}{4m-1}$。接著用遞迴公式：

$$\begin{aligned}a_{m+1}&=\frac{a_{m-1}\cdot a_m}{2a_{m-1}-a_m}=\frac{\frac{3}{4m-5}\cdot\frac{3}{4m-1}}{2\cdot\frac{3}{4m-5}-\frac{3}{4m-1}}=\frac{\left(\frac{3}{4m-5}\cdot\frac{3}{4m-1}\right)(4m-5)(4m-1)}{\left(2\cdot\frac{3}{4m-5}-\frac{3}{4m-1}\right)(4m-5)(4m-1)}\\&=\frac{9}{6(4m-1)-3(4m-5)}=\frac{3}{4(m+1)-1}\end{aligned}$$

故證明成立。

【解法二】 由於要找出分子與分母的和，可考慮此定義數列 $b_n=\frac{1}{a_n}$，其中有 $\frac{1}{a_n}=\frac{2a_{n-2}-a_{n-1}}{a_{n-2}\cdot a_{n-1}}=\frac{2}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}}$，也就是說 $b_n=2b_{n-1}-b_{n-2}=3b_{n-2}-2b_{n-3}=4b_{n-3}-3b_{n-4}=\ldots$。透過遞迴此模式，可發現 $b_n=(n-1)\cdot b_2-(n-2)\cdot b_1$，將 2019 代入後，可得到 $b_{2019}=2018\cdot\frac{7}{3}-2017=\frac{8075}{3}$，最後因爲分子與分母互質，因此答案爲 8078。

【解法三】 先將方程式作轉換，假設 $a_n=x$，$a_{n-1}=y$ 以及 $a_{n-2}=z$，則：

$$\begin{aligned}x&=\frac{zy}{2z-y}\\\Rightarrow 2xz-xy&=zy\\\Rightarrow 2xz&=y(x+z)\\\Rightarrow y&=\frac{2xz}{x+z}\end{aligned}$$

所以 y 是 x 和 z 的調和平均數，表示說 a_n 是一個調和數列，或等價於 $b_n=\frac{1}{a_n}$ 是等差，因此有 $b_1=1,\ b_2=\frac{7}{3},\ b_3=\frac{11}{3},\ \ldots$ 等依此類推。由於公差爲 $\frac{4}{3}$，可將 b_n 表示爲 $b_n=\frac{4}{3}(n-1)+1$，將 2019 代入後可得到 $b_{2019}=\frac{4}{3}(2019-1)+1=\frac{8075}{3}$，意味著 $a_{2019}=\frac{3}{8075}=\frac{p}{q}$，所以 $p+q=8078$。 □

16. 有一位孩子使用不同顏色且相同形狀的長方體來建塔，請問這孩子用 2 個紅色、3 個藍色、4 個綠色的長方體，可以建多少個高度爲 8 單位但構造不一樣的塔？(其中一個長方體被遺漏。)

解答：【解法一】 先將九個長方體排列，然後移除最後一個變成八個長方體，也就是說九個長方體的排列與其實際有效的排列之間存在一對一對應關係，因此最初得到結果爲 9!，但這已經過度計算，因爲紅色長方體彼此之間的位置可以調換，而藍色與綠色的長方體也是如此，所以必須除以 2! 來安排紅色長方體、除以 3! 來安排藍色長方體、除以 4! 來安排綠色長方體，因此共有 $\frac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 4!} = 1,260$ 種不同的塔。也可以寫成 $\binom{9}{2,3,4} = \binom{9}{2}\binom{9-2}{3}\binom{9-(2+3)}{4} = 1,260$。

【解法二】 將此問題分成三種情況，每種情況代表有一個長方體要被排除：

情況一： 排除紅色長方體。此題目變成爲將一個紅色長方體、三個藍色長方體與四個綠色長方體作排列之問題，所以可能的情況有 $\frac{8!}{1!\cdot 4!\cdot 3!} = 280$ 種，此時要注意不用乘以紅色長方體的數量，因爲不知道被移除的是第一個紅色長方體，還是第二個紅色長方體。

情況二： 排除藍色長方體。此題目變成爲將兩個紅色長方體、兩個藍色長方體與四個綠色長方體作排列之問題，所以可能的情況有 $\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 4!} = 420$ 種。

情況三： 排除綠色長方體。此題目變成爲將兩個紅色長方體、三個藍色長方體與三個綠色長方體作排列之問題，所以可能的情況有 $\frac{8!}{2!\cdot 3!\cdot 3!} = 560$ 種。

因此答案爲 $280 + 420 + 560 = 1,260$。

【解法三】 如果作答時間不夠用，藉由猜測和排除法，可注意到選項 A、B 和 C 太小，且因爲其無任何限制時爲 8!，所以選項 E 也無任何意義，所以推測出來答案爲 $1,260$，但不建議使用此策略。 □

17. 對於某個正整數 k，若十進制的分數 $\frac{7}{51}$ 可改爲 k 進制的循環小數，表示爲 $0.\overline{23}_k = 0.232323\ldots_k$，則請問 k 值爲何？

解答：【解法一】 將 $0.\overline{23}_k$ 展開爲 $0.\overline{23}_k = 2\cdot k^{-1} + 3\cdot k^{-2} + 2\cdot k^{-3} + 3\cdot k^{-4} + \cdots$，相當於：

$$2(k^{-1} + k^{-3} + k^{-5} + \cdots) + 3(k^{-2} + k^{-4} + k^{-6} + \cdots)$$

利用等比級數，簡化後可得到 $\frac{2k+3}{k^2-1} = \frac{7}{51}$，解此二次方程式後可得到答案 $k = 16$。

【解法二】 假設 $a = 0.2323\ldots_k$，所以 $k^2 a = 23.2323\ldots_k$。由於 $k^2 a - a = 23_k$，因此 $a = \frac{23_k}{k^2-1} = \frac{2k+3}{k^2-1} = \frac{7}{51}$。如同解法一，可去測試 $2k+3$ 爲 7 的倍數之答案做選擇，或是處理 k^2-1，因此答案爲 16。

【解法三】 將選項中的值作爲 k 值並代入，查看何者成立，經過一漫長地計算，可算出答案爲 16。

【解法四】 如同解法一，可得到 $\frac{2k+3}{k^2-1} = \frac{7}{51}$，可將其改寫爲 $\frac{2k+3}{(k-1)(k+1)} = \frac{7}{51} = \frac{7}{3\cdot 17}$，可注意到 $2k+3 = 2(k+1)+1 = 2(k-1)+5$，由於 17 是質數，所以要找出 $k-1$ 和 $k+1$ 中何者可被 17 整除，檢查所有答案選項後，可得到答案爲 16。□

18. 請問當 x 爲實數時，$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 2019$ 最小可能的值爲何？

解答：【解法一】 可將題目改寫爲 $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6) + 2019$，簡化後可得 $(x^2+5x+5)^2 - 1 + 2019$，由於平方項爲非負，所以對於一些 x，可得知 $x^2+5x+5 = 0$，因此答案爲 2018。

【解法二】 假設 $a=x+\frac{5}{2}$，表達式 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ 可改寫爲 $\left(a-\frac{3}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{3}{2}\right)$，接著可利用兩個平方項的差來得到 $\left(a^2-\frac{9}{4}\right)\left(a^2-\frac{1}{4}\right)$，展開後可得 $a^4-\frac{5}{2}a^2+\frac{9}{16}$。利用配方法可得到 $\left(a^2-\frac{5}{4}\right)^2-1$，最小值爲 -1，因此答案爲 $2019-1=2018$。

【解法三】 與解法一相似，可將題目改寫爲 $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+2019$，假設 $y=x^2+5x$，式子變爲 $(y+4)(y+6)+2019$，現在要找到 $(y+4)(y+6)$ 的臨界點來找出最小值：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2+10y+24)=0\Rightarrow 2y+10=0\Rightarrow 2y(y+5)=0\Rightarrow y=-5,\ 0$，爲了找出最小值，可利用 $y=-5$，因此最小值爲 $(-5+4)(-5+6)=-1$，所以答案爲 $-1+2019=2018$。

注意：此題也可以利用拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 的最小值(最大值)發現到 $x=-\frac{b}{2a}$。

【解法四】 當有奇數個負根時，則表達式爲負的，此情況發生在當 $-2<x<-1$ 或 $-4<x-3$，代入 $x=-\frac{3}{2}$ 或 $x=-\frac{7}{2}$ 可得到 $-\frac{15}{16}$，非常接近 -1，所以答案爲 $-1+2019=2018$。

【解法五】 從選項中來作答，利用刪去法可得知選項 C、D、E 不可能，因爲 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ 實際上可以是負的，例如當 $x=-\frac{3}{2}$ 時，會變成 $2019-\frac{15}{16}$，所以答案接近於 2018。 □

19. 將數字 1, 2, ..., 9 隨機放入 3×3 的 9 個方格中，每個格子中都有一數字，且每個數字只能用一次，請問每一行與每一列的數字和都是奇數之機率爲何？

解答：【解法一】 因爲 $1+2+\cdots+9=45$ 且 $\frac{45}{3}=15$，亦即每一行或每一列的和爲 15，由於奇數和只能由 (偶, 偶, 奇) 或 (奇, 奇, 奇) 組成，因此把重點專注於偶數，需要讓每個偶數與每列或每行中的另一個偶數相對應，可看出共有 $\frac{3!}{2!}\cdot\frac{3!}{2!}=9$ 種方法可做到，其中有 5! 種方法排列奇數、有 4! 種方法排列偶數，所以答案爲 $\frac{5!\cdot 4!\cdot 9}{9!}=\frac{1}{14}$。

【解法二】 利用鴿籠原理，必須至少有一列，其中包含 2 個或更多個奇數，所以該列必須包含 3 個奇數才能得到奇數和，而行也可以做同樣的情形，因此只需選擇一列或一行來填充奇數，可有效放置奇數或偶數的數量爲 $\frac{3!}{2!}\cdot\frac{3!}{2!}=9$ (不考慮擺放位置與順序)，而分母將會是 $\binom{9}{4}$，即爲選擇 9 個格子中的哪 4 個會包含偶數之總可能數，因此答案爲 $\frac{9}{\binom{9}{4}}=\frac{1}{14}$。 □

20. 將一顆紅色的球與一顆綠色的球隨意地投入有標註號碼 k 的容器內($k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$)，已知每顆球投入容器 k 的機率爲 2^{-k} ($k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$)。試問紅色球比綠色球投入較高編號容器的機率爲何？

解答：【解法一】 透過對稱性，紅球與綠球在編號較高容器中被投入的機率均相同，並藉由無窮等比級數和，紅球與綠球投入同一個容器中的機率爲 $\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\cdot 2^{-k}=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-2k}=\frac{1}{3}$，因此答案爲 $\frac{1-\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{3}$。

【解法二】 假設綠球投入容器 $i,\ i\geq 1$ 的機率爲 $\frac{1}{2^i}$，此時，透過等比級數和公式，紅球進入高編號容器中的機率爲 $\frac{1}{2^{i+1}}+\frac{1}{2^{i+2}}+\cdots=\frac{1}{2^i}$，所以綠球和紅球都投入容器 i 的機率爲 $\left(\frac{1}{2^i}\right)^2=\frac{1}{4^i}$，因此答案爲 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4^i}=\frac{1}{3}$。

【解法三】 經由等比級數和公式，紅球與綠球各別投入號碼相鄰的容器中之機率爲 $\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times8}+\frac{1}{8\times16}+\cdots=\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\cdots=\frac{1}{6}$，相同地，兩球各別投入號碼差距爲 2 的容器中之機率爲 $\frac{1}{2\times8}+\frac{1}{4\times16}+\frac{1}{8\times32}+\cdots=\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots=\frac{1}{12}$，透過觀察可發現，每次兩球各別投入容器的號碼之差距增加 1 時，機率就會減半，因此答案爲 $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\cdots=\frac{1}{3}$。

【解法四】 將此題轉換成遊戲，而獲勝之定義爲出現在較高編號容器中的球。從第一輪開始，第一個容器中的球數有四種可能：紅球、綠球、紅球與綠球、沒半球。每種可能的結果，機率均爲 $\frac{1}{4}$，如果沒有球投入容器中，則該遊戲從第二輪重新開始，所以如果 p 是紅球獲勝的機率，可寫成 $p=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}p$。紅球立即獲勝的機率爲 $\frac{1}{4}$，綠球或紅球與綠球獲勝的機率爲 0，而沒半球獲勝的機率爲 $\frac{1}{4}$，在經過一輪之後，可得到答案爲 $p=\frac{1}{3}$。

【解法五】 爲了找到紅球投入高編號容器的機率比綠球高的可能性，可簡單地刪除奇數編號，即 $1,\ 3,\ 5,\ \ldots$，並將投入剩下編號的容器之機率求和，如同解法二的方法，可先得到無窮等比數列 $\frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{64},\ \cdots$，因此答案爲 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4^i}=\frac{1}{3}$。 □

~全卷完~